Feuille TD 1 – Exercices Algèbre – Groupes

*Ce fascicule d'exercices sur les groupes nous occupera durant les **six semaines** de cours sur le sujet. Il comporte beaucoup d'exercices (orientés vers ce qui sera attendu de vous au concours de l'agrégation externe) et (pas de panique!) nous n'aurons pas le temps de tous les traiter en classe et il ne sera pas exigé de votre part de tous les traiter! Il s'agit simplement pour vous d'une banque d'exercices et vous êtes simplement invités à regarder par vous-mêmes les exercices que l'on ne traitera pas ensemble et portant sur les sujets sur lesquels vous souhaitez vous exercer et **à me poser d'éventuelles questions** soit en TD soit par mail à l'adresse mail suivante* `kevin.destagnol@universite-paris-saclay.fr`*. Un **corrigé** sera disponible sur Ecampus.*

1 Généralités

Exercice 1 — Botanique des groupes de petit cardinal. Décrire, à isomorphisme près, tous les groupes de cardinal $\leqslant 7$.

Exercice 2 — Groupe symétrique. Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique sur n lettres.

1. Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_3$? de $\mathfrak{S}_4$? de $\mathfrak{S}_5$? de $\mathfrak{S}_n$?
2. Donner le treillis[1] des sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, en précisant à chaque fois lesquels des sous-groupes sont distingués. Répéter l'exercice avec le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
   Soient G un groupe et $K \subseteq H$ deux sous-groupes de G. On suppose que $K \lhd H$ et que $H \lhd G$. A-t-on $K \lhd G$? Démontrer que si K est caractéristique dans H et que H est caractéristique dans G, alors K est caractéristique dans G.
3. Une *partition d'un entier* n est une suite $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_r$ d'entiers tels que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$. Montrer que les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sont en bijection avec les partitions de n.
4. Déterminer le centre de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 3 — Morphismes ou non ?.
Soit G un groupe. Les applications suivantes de G dans G sont-elles toujours des morphismes ?

1. $x \mapsto ax$, avec $a \in G$ fixé ;
2. $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$;
3. $x \mapsto x^{-1}$.

Exercice 4 — Groupes, intersections et réunions.

1. Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes d'un groupe G est aussi un sous-groupe.
2. Soient A et B deux sous-groupes d'un même groupe G. Montrer que $A \cup B$ est un sous-groupe de G si, et seulement si, $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.
3. Que se passe-t-il si l'on considère la réunion d'au moins trois sous-groupes ?

Exercice 5 — Groupe diédral. On considère les deux transformations suivantes du plan euclidien : la rotation ρ de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et la symétrie orthogonale σ par rapport à l'axe des abscisses. Le groupe *diédral* $\mathbf{D}_4$ est le sous-groupe des isométries du plan engendré par ρ et σ.

1. Calculer l'ordre de σ et de ρ. Décrire l'isométrie $\sigma\rho\sigma^{-1}$.
2. Montrer que $\mathbf{D}_4$ contient 8 éléments ; caractériser ces éléments géométriquement.
3. Déterminer les classes de conjugaison dans $\mathbf{D}_4$.
4. Donner le treillis des sous-groupes de $\mathbf{D}_4$, en précisant les sous-groupes distingués.
5. Pour un entier $n > 0$, le groupe diédral $\mathbf{D}_n$ est le sous-groupe des isométries du plan engendré par σ et par la rotation ρ' de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. Montrer que $\mathbf{D}_n$ contient $2n$ éléments et correspond au groupe des isométries du plan préservant le polygone régulier du plan à n côtés de sommet les racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 6 — Groupes de type fini. Soit G un groupe admettant une partie génératrice finie. Montrer que G est fini ou dénombrable. Est-il vrai réciproquement que tout groupe dénombrable admet une partie génératrice finie ?

1. C'est-à-dire le graphe non orienté dont les sommets sont les sous-groupes de G et où une arête relie deux sous-groupes H_1 et H_2 si, et seulement si, $H_1 \subseteq H_2$ ou $H_2 \subseteq H_1$.

Exercice 7. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice fini m. On note G/H l'ensemble[2] des classes à gauche de G modulo H. Pour $g \in G$, on note $h_g : G/H \to G/H$ l'application $aH \mapsto gaH$.

1. Montrer que h_g est une bijection, et que l'application h qui envoie g sur h_g est un homomorphisme de G dans $\mathfrak{S}(G/H)$. Donner une interprétation en termes d'action de groupe.
2. Montrer que $[G : \mathrm{Ker}\,(h)]$ divise $m!$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(h)$ est contenu dans H.
4. Montrer que $[H : \mathrm{Ker}\,(h)]$ divise $(m-1)!$.
5. **Application 1** : Montrer que si H est d'indice 2 dans G, alors H est distingué dans G. Le démontrer également de façon plus élémentaire.
6. **Application 2** : Montrer que si G est un p-groupe, et si H est d'indice p dans G, alors H est distingué dans G.
7. **Application 3** : Supposons que G est fini et que $m = [G : H]$ est le plus petit diviseur premier de l'ordre de G. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 8 — Quaternions et groupes d'ordre 8. On note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ de la forme

$$M_{a,b} := \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

On pose $H^* = H - \{0\}$.

1. Montrer que H^* est un sous-groupe non commutatif de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$.
2. On note $\mathbf{1}$ la matrice identité, et on pose $I := M_{i,0}$, $J = M_{0,1}$, $K = M_{0,i}$. Soit $\mathbf{H}_8 = \{\pm\mathbf{1}, \pm I, \pm J, \pm K\}$. Montrer que $\mathbf{H}_8$ est un sous-groupe non commutatif de cardinal 8 de H^*.
Indication : On observera que $IJ = K = -JI$, avec des relations analogues par permutations circulaires de I, J, K.
3. Montrer que le centre et le sous-groupe dérivé de $\mathbf{H}_8$ sont tous deux égaux à $\{\pm 1\}$.
4. Montrer que l'abélianisé de $\mathbf{H}_8$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.
5. Est-ce qu'un groupe dont tous les sous-groupes sont distingués est nécessairement abélien ?

Exercice 9. On considère le groupe $G = \mathfrak{A}_4$. Soit $D(G)$ son sous-groupe dérivé. Soit V_4 le sous-groupe de G constitué de l'identité et des doubles transpositions.

1. Montrer que $V_4 \lhd G$, puis que $D(G) \subseteq V_4$. *Indication : On observera que G/V_4 est de cardinal 3.*
2. Montrer que $D(G) \neq \{1\}$ et que G ne possède pas de sous-groupe distingué de cardinal 2. En déduire que $D(G) = V_4$.
3. Montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe fini A, alors $H \lhd A$.
Indication : Regarder les classes à gauche et à droite suivant G.
4. Soit H un sous-groupe de $G = \mathfrak{A}_4$. Montrer que si H est d'indice 2, alors $D(G) \subseteq H$ et aboutir à une contradiction.
Indication : On considérera G/H.
Ainsi G (qui est de cardinal 12) n'a pas de sous-groupe de cardinal 6.
5. Montrer au contraire que pour tout $d \in \mathbf{N}^*$ tel que d divise 24, le groupe $\mathfrak{S}_4$ possède un sous-groupe de cardinal d.

Exercice 10 — Groupe des automorphismes.

1. Soient p un nombre premier et $n \in \mathbf{N}$. Établir que $\mathtt{Aut}\,((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n)$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_n\,(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$. Pour quelles valeurs de n ce groupe est-il commutatif ?
2. ON suppose que $n \geqslant 2$. Montrer que ce groupe contient un sous-groupe distingué mais non caractéristique.
3. On considère dans cette question le cas $p = n = 2$. Montrer que $\mathtt{Aut}\left((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2\right)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 11 — Groupes d'exposant 2.

1. Soit G un groupe tel que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien et donner des exemples de tels groupes finis et infinis.
2. Montrer que si G est fini, il existe un entier n tel que G est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$.

Exercice 12 — Exposant d'un groupe. On définit *l'exposant* d'un groupe abélien fini G et on note $\exp(G)$, comme le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $g^n = 1$ pour tout $g \in G$.

1. Soient x et y deux éléments de G d'ordres respectifs $\omega(x)$ et $\omega(y)$ premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre $\omega(x)\omega(y)$.
2. A-t-on sans hypothèse que l'ordre de xy est donné par $\mathrm{ppcm}(\omega(x), \omega(y))$?
3. Montrer qu'il existe $z \in G$ tel que z soit d'ordre $\exp(G)$.

2. Qui n'est pas un groupe en général.

4. Retrouver alors qu'un sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique.

Exercice 13.

1. Soit G un groupe tel que $G/Z(G)$ est cyclique. Rappeler pourquoi G est abélien. Le résultat tient-il toujours si l'on suppose seulement que $G/Z(G)$ est abélien ?

2. Justifier que la probabilité que deux éléments d'un groupe non abélien commutent est $\leqslant \frac{5}{8}$.

3. Montrer qu'un p-groupe d'ordre p^n possède des sous-groupes distingués d'ordre p^i pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.

Exercice 14. Soient p un nombre premier et $K = \mathbf{F}_p$. On considère le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(K)$ et son sous-groupe $\mathrm{SL}_n(K)$.

1. Montrer que le centre de $\mathrm{GL}_n(K)$ (resp. de $\mathrm{SL}_n(K)$) est constitué des matrices scalaires de ce groupe.

2. On note $\mathrm{PGL}_n(K)$ (resp. $\mathrm{PSL}_n(K)$) le quotient de $\mathrm{GL}_n(K)$ (resp. $\mathrm{SL}_n(K)$) par son centre. Calculer les cardinaux de $\mathrm{SL}_n(K)$, $\mathrm{PGL}_n(K)$ et $\mathrm{PSL}_n(K)$.

Exercice 15. Soit $n \geqslant 5$. Trouver tous les morphismes de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$. Que se passe-t-il si on remplace $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ par un groupe abélien quelconque ? Et si on prend $n = 4$?

2 Actions de groupes, théorèmes de Sylow et simplicité

Exercice 1. Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il existe un sous-groupe distingué K de G, contenu dans H, tel que $[G : K]$ divise $n!$.
   Indication : On pourra considérer l'action de G sur G/H.
2. On suppose que G est fini. Montrer que G n'est pas la réunion des conjugués gHg^{-1} de H.
3. Montrer que **2.** reste vrai si G est infini.
4. Est-ce que **2.** reste vrai si on ne suppose plus que $[G : H]$ est fini ?
5. Soit G un groupe fini agissant transitivement sur un ensemble fini X tel que $\#X \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $g \in G$ ne fixant aucun point de X.
6. Soit $k \geqslant 5$ un entier et soit H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_k$ d'indice compris entre 2 et $k-1$. Montrer que $H = \mathfrak{A}_k$. On admettra le fait que les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_k$ sont $\{1\}$, $\mathfrak{A}_k$ et $\mathfrak{S}_k$.

Exercice 2. Soient p un nombre premier et G un p-groupe fini. Soit $(A, +)$ un groupe abélien avec $A \neq \{0\}$. On suppose donnée une action de G sur A par automorphismes, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, la bijection $x \mapsto g \cdot x$ de A dans A est un automorphisme du groupe abélien A. On suppose de plus que A est *de torsion p-primaire*, *i.e.* pour tout $x \in A$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $p^m x = 0$.

1. Montrer que si A est fini, son cardinal est une puissance de p.
   Indication : On pourra utiliser la classification des groupes abéliens finis, ou encore le théorème de Sylow.
2. On suppose que A est fini. Montrer qu'il existe $x \neq 0$ dans A tel que pour tout $g \in G$, on ait $g \cdot x = x$.
3. On ne suppose plus A fini et soit $a \neq 0$ dans A. Montrer que le sous-groupe B de A engendré par $\{g \cdot a, g \in G\}$ est fini.
4. En déduire que le résultat de **2.** vaut encore sans l'hypothèse A fini.

Exercice 3. Montrer que tout groupe d'ordre 255 est cyclique.

Exercice 4 — Groupe symétrique, le retour.

1. Soit G un groupe fini. Rappeler pourquoi il existe $n \in \mathbf{N}$ et un homomorphisme injectif de G dans $\mathfrak{S}_n$.
   En déduire qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ et un homomorphisme injectif de G dans $\mathfrak{A}_n$ et qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ et un homomorphisme injectif de G dans $\mathrm{GL}_n(k)$ pour tout corps k.
2. Montrer qu'un sous-groupe H d'indice n dans $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.
   Indication : On pourra penser à restreindre l'action de G sur G/H à H.
3. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. En faisant agir le sous-groupe $\langle \sigma \rangle$ de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, \ldots, n\}$, retrouver l'existence de la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

Exercice 5. Soit $P_n(k)$ le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ qui ont exactement k points fixes. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = n!$ (cette dernière question était un exercice des olympiades de La Havane en 1987...).

Exercice 6.

1. Combien y a-t-il d'opérations du groupe $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?
2. Soient G et X deux groupes. On dit que G *opère par automorphismes* sur X si on s'est donnée une opération $(g, x) \mapsto g.x$ de G sur X telle que pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g.x$ soit un automorphisme de X. L'opération de G sur lui-même par translation est-elle une opération par automorphismes ? Même question pour l'opération par conjugaison.
3. On prend $G = (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, +)$ et $X = (\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}, +)$. Combien y a-t-il d'actions de G sur X par automorphismes ? Même question en remplaçant $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$ par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 7. Soit G un groupe. Soit $x_0 \in G$. On appelle *centralisateur* de x_0 l'ensemble G_{x_0} des éléments x de G vérifiant $xx_0 = x_0x$.

1. Montrer que G_{x_0} est un sous-groupe de G. Est-il toujours distingué ?
2. On suppose G fini. Soit C la classe de conjugaison de x_0. Trouver une relation entre $\#G$, $\#C$, et $\#G_{x_0}$.

Exercice 8. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Calculer le nombre moyen de points fixes d'un élément de G. Que dire en particulier si l'action est transitive ? De la moyenne du nombre de points fixes d'une permutation aléatoire ?

Exercice 9 — Lemme de Cauchy. Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant le cardinal de G. En utilisant une action convenable de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur l'ensemble

$$X = \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \ : \ g_1 g_2 \cdots g_p = 1\},$$

établir que G admet un élément d'ordre p (sans utiliser les théorèmes de Sylow !).

Exercice 10. Combien y a-t-il de colliers différents formés de 9 perles dont 4 bleues, 3 blanches et 2 rouges ?

Exercice 11. Soit G un groupe fini non trivial agissant sur un ensemble fini X. On suppose que pour tout $g \neq e \in G$, il existe un unique $x \in X$ tel que $g \cdot x = x$. On souhaite montrer que X admet un point fixe sous G (nécessairement unique).

1. On pose
$$Y = \{x \in X \ : \ \mathsf{Stab}_G(x) \neq \{e\}\} .$$
Montrer que Y est stable par G.
2. On note $n = \#Y/G$ et $y_1, \ldots, y_n$ un système de représentants de Y/G. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note m_i le cardinal de $\mathsf{Stab}_G(y_i)$. En considérant l'ensemble
$$Z = \{(g, x) \in G \smallsetminus \{e\} \times X \ : \ g \cdot x = x\} ,$$
montrer que
$$1 - \frac{1}{\#G} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$
3. En déduire que $n = 1$ et conclure.

Exercice 12 — Un groupe d'ordre 56 n'est pas simple.
Soit G un groupe d'ordre 56.

1. Montrer que G a un ou huit 7-Sylow.
2. On suppose que G possède huit 7-Sylow. Montrer que deux 7-Sylow distincts sont d'intersection triviale. En déduire le nombre déléments d'ordre 7 dans G puis le nombre de 2-Sylow.
3. Conclure que G n'est pas simple.

Exercice 13 — Actions de groupes.

1. Soient G un groupe fini et p le plus petit facteur premier de $|G|$. On suppose qu'il existe un sous-groupe $H \lhd G$ d'ordre p. Montrer que H est dans le centre de G.
2. On fait opérer le groupe multiplicatif $G = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ sur l'ensemble $X = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ par $a \cdot x = ax$. Décrire les orbites et les stabilisateurs de chacun des éléments de X dans le cas $n = 8$. Écrire l'équation aux classes dans le cas général.
3. Soit E un ensemble muni d'une action $\cdot$ d'un groupe fini G. On note
$$E_G = \{x \in E \ : \ \forall g \in G, \ g \cdot x = x\} .$$
Si l'on suppose que $E_G = \varnothing$, que $|G| = 15$ et $|E| = 17$, quel est alors le nombre d'oribites et le cardinal de chacune d'entre elles ?
Si $|G| = 33$ et que $|E| = 19$, établir que $E_G \neq \varnothing$.
4. Soit $H \lhd G$ un sous-groupe distingué d'un groupe G qui agit transitivement sur un ensemble X. Montrer que les orbites de l'action de H (induite par l'action de G) sur X ont toutes même cardinal.
5. Soit une action d'un groupe G sur un ensemble X. Montrer que tous les éléments d'une même orbote ont même stabilisateur si, et seulement si, ce stabilisateur est un sous-groupe distngué de G.
6. Soit G un groupe de cardinal pq avec p, q deux nombres premiers distincts. On suppose que G opère sur un ensemble X de cardinal $n = pq - p - q$. Montrer qu'il existe au moins un point fixe par cette action.
7. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K. On fait opérer le groupe linéaire $G := \mathsf{GL}(E)$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E par : $g.F := g(F)$ pour tout $g \in G$ et tout sous-espace F de E. Quelles sont les orbites pour cette action ?

Exercice 14. Trouver un groupe fini G non réduit au neutre tel que : le centre de G est 1, le sous-groupe dérivé de G est G, mais G n'est pas simple.

Exercice 15. On suppose qu'il existe un groupe simple G d'ordre 180.

1. Montrer que G contient trente-six 5-Sylow.
2. Montrer que G contient dix 3-Sylow puis que deux 3-Sylow distincts ne peuvent pas contenir un même élément $g \neq e$.
3. Conclure.

Exercice 16. Soient p et q deux nombres premiers distincts.

1. Soit G un groupe simple d'ordre $p^\alpha m$ avec $\alpha \geqslant 1$ et $p \nmid m$. On note n_p le nombre de p-Sylow de G. Montrer que $\#G$ divise $n_p!$.
2. Montrer qu'un groupe d'ordre $p^m q^n$ avec $p < q$, $1 \leqslant m \leqslant 2$ et $n \geqslant 1$ n'est pas simple.
3. Montrer qu'un groupe d'ordre $p^2 q$ ou $p^3 q$ n'est pas simple. Classifier les groupes d'ordre $p^2 q$.

4. Montrer qu'un groupe non commutatif d'ordre < 60 n'est pas simple.

Exercice 17 — Groupes simples d'ordre 60. Soit G un groupe simple d'ordre 60. On veut montrer que G est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$.

1. Montrer que G admet six 5-Sylow.
2. En déduire qu'il existe un sous-groupe G' de $\mathfrak{A}_6$, d'indice 6, qui est isomorphe à G.
3. En faisant agir G' sur le quotient $\mathfrak{A}_6/G'$, plonger G' dans $\mathfrak{S}_5$.
4. Conclure.

Exercice 18. Soit $n \geqslant 1$. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de groupes finis admettant exactement n classes de conjugaison.

3 Produit semi-direct

Exercice 1 — Produit semi-direct. Soient H et N deux groupes et soient φ et $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ des morphismes de groupes. On veut trouver des conditions pour que $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ soient isomorphes.

1. S'il existe un automorphisme α de H tel que $\psi = \varphi \circ \alpha$, montrer que l'on a le résultat attendu.
2. S'il existe un automorphisme u de N tel que
$$\forall h \in H, \quad \varphi(h) = u \circ \psi(h) \circ u^{-1},$$
montrer que la conclusion vaut encore.
3. Si H est cyclique et si $\varphi(H) = \psi(H)$, montrer que $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.
4. En déduire qu'il existe, à isomorphisme près, un unique produit semi-direct non trivial $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2 \rtimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, où p est un nombre premier impair.
5. Montrer que le centre de ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
6. Soit G un groupe d'ordre p^3 non cyclique et contenant un élément x d'ordre p^2. Montrer que $\langle x \rangle$ est distingué dans G et que G est produit semi-direct de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ par $\langle x \rangle \cong \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$.
7. Décrire les classes d'isomorphismes de groupes de cardinal p^3 pour p premier impair.
Indication : On pourra raisonner suivant l'ordre maximal d'un élément du groupe.

Exercice 2. Soit p un nombre premier impair.

1. Déterminer les p-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$.
2. Soient φ et ψ des morphismes non triviaux de $\mathbf{F}_p$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$. En notant pour tout entier k, φ_k le morphisme défini par $\varphi_k(x) = \varphi(kx)$, montrer qu'il existe un entier k et une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ tels que $\psi = P\varphi_k P^{-1}$.
3. En déduire qu'il existe, à isomorphisme près, un unique produit semi-direct non trivial $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2 \rtimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
4. Montrer que le centre de ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
5. Soit G un groupe d'ordre p^3 non cyclique, contenant un élément x d'ordre p^2. Montrer que $\langle x \rangle$ est distingué dans G et que G est produit semi-direct de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ par $\langle x \rangle \cong \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$.
6. Décrire les classes d'isomorphisme de groupes de cardinal p^3 (on pourra raisonner par exemple suivant l'ordre maximal d'un élément du groupe).

4 Pour celles et ceux qui veulent aller plus loin...

EXERCICE 1.

1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ possède un unique 2-Sylow que l'on identifiera.
2. Classifier les groupes de cardinal $\leqslant 15$.

EXERCICE 2 — SOUS-GROUPE DE FRATTINI. Soit G un groupe de type fini. On dit qu'un sous-groupe H de G est maximal si $H \neq G$ et qu'aucun sous-groupe propre de G n'est compris strictement entre H et G. On définit alors le *sous-groupe de Frattini* de G, et on note $\phi(G)$, l'intersection des sous-groupes maximaux de G.

1. Montrer que $\mathbf{Q}$ ne possède pas de sous-groupe maximal.
2. Montrer que G admet au moins un sous-groupe maximal. La démonstration se simplifie-t-elle si G est fini ?
3. Déterminer $\phi(\mathbf{Z})$ et $\phi(\mathfrak{S}_n)$.
4. Montrer que $\phi(G)$ est caractéristique. On notera $\pi : G \to G/\phi(G)$ la projection canonique.
5. Soit $S \subseteq G$ une partie de G. Montrer que S engendre G si, et seulement si, $\pi(S)$ engendre $G/\phi(G)$.
6. Montrer que $\phi(G)$ est exactement l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que pour toute partie $S \subseteq G$, on a $\langle S, g\rangle = G \quad \Rightarrow \langle S\rangle = G$.
7. On suppose dans cette question que G est un p-groupe pour p un nombre premier.
   (a) Montrer que tout sous-groupe maximal de G contient $D(G)$ et le sous-groupe G^p engendré par les puissances p-ièmes dans G.
   (b) Montrer que $G/\phi(G)$ est le plus grand quotient abélien de G d'exposant p.
   (c) Que peut-on en déduire sur le nombre minimal de générateurs de G ?
   (d) Montrer que $\phi(G) = D(G) \cdot G^p$.

EXERCICE 3. Soit $n \geqslant 1$.

1. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ tel que ϕ transforme toute transposition en une transposition. Montrer que ϕ est intérieur.
2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer le cardinal du commutant $Z(\sigma) = \left\{\tau \in \mathfrak{S}_n \ : \ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma\right\}$ de σ.
3. En déduire que si $n \neq 6$, on a $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$.
4. Soit $n \geqslant 5$ tel que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$. Montrer que tous les sous-groupes d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ sont conjugués.
5. En utilisant les 5-Sylow de $\mathfrak{S}_5$, montrer qu'il existe un sous-groupe H d'indice 6 de $\mathfrak{S}_6$ opérant transitivement sur $\{1, \ldots, 6\}$.
6. Construire géométriquement un sous-groupe H' de $\mathfrak{S}_6$ vérifiant les mêmes propriétés que H.
7. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \neq \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6)$.