

FEUILLE TD 4 – EXERCICES ALGÈBRE – MODULES II

EXERCICE 1.

1. Montrer que les groupes

$$\mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/90\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/25\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}/100\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/30\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$$

sont isomorphes.

2. Montrer qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ pour un certain nombre premier p .
3. Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 360? Plus généralement de cardinal n avec $n \geq 1$ un entier naturel?
4. Quels sont les entiers n tels que le groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ soit cyclique? Décomposer le groupe $G = (\mathbf{Z}/187\mathbf{Z})^\times$ sous la forme donnée par le théorème de structure des groupes abéliens de type fini.

EXERCICE 2.

Soit K un corps. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit u un endomorphisme de E . On dit que u est *cyclique* s'il existe une base dans laquelle sa matrice est une matrice compagnon $\mathcal{C}(P)$, où P est un polynôme.

1. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique.
2. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, les seuls endomorphismes qui commutent avec u sont les polynômes en u .
3. On dit que u est *irréductible* si les seuls sous-espaces de E stables par u sont E et $\{0\}$. Montrer que u est irréductible si, et seulement si il est cyclique et son polynôme caractéristique est irréductible..

On dit que u est *semi-simple* si tout sous-espace vectoriel F stable par u admet un supplémentaire stable par u .

4. Montrer que u est semi-simple si, et seulement si, son polynôme minimal est sans facteur carré. En déduire que si u est diagonalisable, alors u est semi-simple. Que dire dans le cas d'un corps algébriquement clos?
Indication : On pourra munir (E, u) d'une structure de $k[X]/(\pi_u)$ -module où π_u est le polynôme minimal de u .
5. Montrer que si K est de caractéristique nulle, alors u est semi-simple si, et seulement si, il existe une extension L de K sur laquelle u est diagonalisable.

EXERCICE 3. Soient M et N deux A -modules.

1. Que représente $m \otimes n$ pour $m \in M$ et $n \in N$?
2. Que signifie le fait que $m \otimes n = 0$ pour $m \in M$ et $n \in N$?
3. Que signifie le fait que $M \otimes_A N = \{0\}$?
4. Que signifie le fait que

$$\sum_{i=1}^k m_i \otimes n_i = \sum_{i=1}^\ell m'_i \otimes n'_i$$

avec $k, \ell \in \mathbf{N}^\times, m_1, \dots, m_k, m'_1, \dots, m'_\ell \in M$ et $n_1, \dots, n_k, n'_1, \dots, n'_\ell \in N$?

5. Soit $f : M \otimes_A N \rightarrow P$ un morphisme. Si $f(m \otimes n) = 0$ implique $m \otimes n = 0$ pour tous $m \in M$ et $n \in N$, l'application f est-elle injective?
Indication : On pourra considérer $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $z \otimes w \mapsto zw$.
6. Trouver un exemple tel que $M \otimes_A M = M$? $M \otimes_A M = \{0\}$?
7. Si M est sans torsion, $M \otimes_A M$ est-il sans torsion?

EXERCICE 4.

1. Donner les invariants de similitude et les réduites de Frobenius¹ correspondantes des endomorphismes $u \in \mathcal{L}(k^4)$ dont le polynôme caractéristique est $\chi_u = X^4$ dans les cas suivants : $k = \mathbf{F}_2, k = \mathbf{Q}$ et $k = \mathbf{C}$.
2. Même question avec $\chi_u = X(X - 1)(X - 2)(X - 3)$ et $u \in \mathcal{L}(k^6)$ et $\chi_u = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)^2$.
3. Calculer les invariants de similitude des matrices

$$\begin{pmatrix} X^2 - 1 & X(X - 1) & (X - 1)(X - 5) \\ (X - 1)(X^2 + 3X + 2) & X^2 - 3X + 2 & (X - 1)^3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{Q}[X]) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Q}).$$

1. Autrement dit, la matrice du Théorème 3.18 des notes de cours.

EXERCICE 5.

1. Soit k un corps. Montrer que le morphisme naturel de k -algèbres de $k(X) \otimes k(Y)$ vers $k(X, Y)$ est injectif mais non surjectif.
2. Soit L une extension de K . Montrer que $K(T) \otimes_K L$ est isomorphe au sous-anneau de $L(T)$ constitué des $\frac{P}{Q}$ avec $P \in L[T]$ et Q non nul dans $K[T]$. Ce sous-anneau est-il un corps?
3. Cette question fait appel à l'exercice 2 de la feuille de TD III. Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A . Montrer que l'on a un isomorphisme canonique de $S^{-1}A$ -modules

$$S^{-1}(M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_N) \cong S^{-1}M_1 \otimes_{S^{-1}A} \cdots \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}M_n.$$

EXERCICE 6.

1. Soit A un anneau intègre de corps de fractions k et V un k -espace vectoriel. Montrer que $k \otimes_A V \cong V$.
2. Calculer les produits tensoriels suivants : $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ en tant que \mathbf{Z} -module puis

$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}, \quad \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{3}), \quad (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[i].$$

EXERCICE 7. Soient M, M', N, N' des A -modules libres de type fini et $\varphi : M \rightarrow M'$ et $\psi : N \rightarrow N'$ deux applications A -linéaires. On se propose d'étudier quelques propriétés de l'application linéaire $\varphi \otimes \psi : M \otimes_A M' \rightarrow N \otimes_A N'$.

1. Décrire la matrice de $\varphi \otimes \psi$ dans des bases adaptées. La comparer avec celle de $\psi \otimes \varphi$.
2. Montrer qu'on a un isomorphisme

$$\text{Hom}_A(M, M') \otimes_A \text{Hom}_A(N, N') \longrightarrow \text{Hom}_A(M \otimes_A N, M' \otimes_A N').$$

Que se passe-t-il si l'on supprime les hypothèse de liberté et de type fini?

3. Soient maintenant M'', N'' deux A -modules et $\varphi' : M' \rightarrow M''$ et $\psi' : N' \rightarrow N''$ deux morphismes. Établir que

$$(\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi) = (\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi)$$

dans $\text{Hom}_A(M \otimes_A N, M'' \otimes_A N'')$.

4. Montrer que si φ et ψ sont des isomorphismes, alors $\varphi \otimes \psi$ aussi. On précisera sa réciproque.
5. Montrer que si φ et ψ sont surjectives, alors $\varphi \otimes \psi$ aussi. Le résultat vaut-il pour l'injectivité?
Indication : Considérer $\alpha : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ donnée par $x \mapsto px$.
6. Si φ et ψ sont surjective, établir que $\text{Ker}(\varphi \otimes \psi)$ est le sous-module de $M \otimes_A N$ engendré par les $m \otimes n$ avec $m \in \text{Ker}(\varphi)$ et $n \in \text{Ker}(\psi)$.

EXERCICE 8. On considère \mathbf{R} en tant que \mathbf{Z} -module.

1. Soit $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R}, \mathbf{Q})$ telle que $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(y) = 1$.
2. Soient $x \in \mathbf{R}^\times$ et $y \in \mathbf{R}$. Montrer que l'on a

$$x \otimes \bar{y} = 0 \in \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\mathbf{Z} \iff y \in \mathbf{Q}.$$

3. Soient $(x_i)_{i \in I}$ une famille \mathbf{Q} -libre de réels et V le sous-espace vectoriel de \mathbf{R} engendré par cette famille. Montrer que si $1 \notin V$, alors $(1 \otimes \bar{x}_i)_{i \in I}$ est une famille \mathbf{R} -libre² de $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

2. On considérera la structure de \mathbf{R} -espace vectoriel sur $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ donnée par

$$t \cdot (x \otimes \bar{y}) = (tx) \otimes \bar{y}.$$