

# 1. Groupes

## 1.1. Quelques rappels

Notations, premiers exemples de groupes, de morphismes, et de sous-groupes.

Sous-groupe engendré, sous-groupes de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .

Sous-groupes distingués et caractéristiques, groupes quotients, théorèmes de factorisation.

Centre et sous-groupe dérivé.

## 1.2. Groupes finis

Opérations de groupes, équations aux classes, formule de Burnside.

$p$ -groupes, théorèmes de Sylow.

Compléments sur  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , structure de  $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ .

## 1.3. Quelques groupes particuliers

Groupes simples, résolubles, nilpotents. Exemples liés au groupe symétrique et au groupe alterné.

# 2. Anneaux commutatifs

## 2.1. Généralités sur les anneaux

Définitions, premiers exemples.

Ideaux, anneaux quotients, idéaux premiers et maximaux.

Anneaux intègres, corps, corps des fractions.

Anneaux principaux, euclidiens.

## 2.2. Divisibilité dans les anneaux intègres

Éléments irréductibles, éléments associés.

Généralités sur les anneaux factoriels.

## 2.3. Anneaux de polynômes

Polynômes en  $n$  indéterminées, notion de  $A$ -algèbre.

Anneaux noethériens.

Factorialité des anneaux de polynômes.

## 3. Modules sur un anneau commutatif

### 3.1. Généralités sur les modules

Sous-modules, somme directe de modules, premiers exemples.

Modules libres, modules de type fini, rang d'un module libre.

Sous-modules d'un module libre/de t.f., exemples et contre-exemples.

### 3.2. Produit tensoriel

Produit tensoriel de modules.

Produit tensoriel d'algèbres.

Suites exactes et produits tensoriels. Modules et homomorphismes plats.

### 3.3. Modules sur un anneau principal

Th. de la base adaptée, diviseurs élémentaires, th. de structure des modules de type fini.

Décomposition  $p$ -primaire.

Applications : structure des groupes abéliens de type fini, équivalence des matrices à coefficients dans un anneau principal, réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel.

## 4. Théorie des corps, théorie de Galois

### 4.1. Généralités et premiers exemples

Extensions de corps, éléments algébriques, corps de rupture, corps de décomposition, clôture algébrique.

Corps finis.

Polynômes irréductibles sur  $\mathbf{Q}$ , sur les corps finis.

### 4.2. Théorie de Galois

Extensions normales, séparables.

Degré des extensions et ordre des groupes d'automorphismes.

Correspondance de Galois.

Résolution par radicaux, exemples de groupes de Galois.

Nombres constructibles.