Partiel d'algèbre, M1 MF (3 heures)

D. Harari, K. Destagnol, P. Lorenzon

20 octobre 2023

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Le symbole (*) désigne une question a priori plus difficile.

Exercice 1 : Exposant d'un groupe (7 points)

Soit G un groupe fini (dont la loi est notée multiplicativement). On appelle *exposant* de G, et on note $\exp G$, le plus petit entier $n > 0$ tel que $x^n = 1$ pour tout x de G.

a) Montrer que pour tout élément x de G, l'ordre (noté $\omega(x)$) de x divise $\exp G$.

b) Soit p un nombre premier, on écrit $\exp G = p^\alpha m$ avec $\alpha \in \mathbf{N}$ et m non divisible par p. Montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $\omega(x)$ soit divisible par p^α.

c) En déduire que $\exp G$ est le plus petit commun multiple de la famille $(\omega(x))_{x \in G}$.

d) Déterminer $\exp G$ quand G est le groupe alterné $\mathcal{A}_5$.

On suppose dans toute la suite que A est un groupe abélien.

e) Montrer que si $x_1, ..., x_r$ sont des éléments de A tels que les $\omega(x_i)$ soient deux à deux premiers entre eux, alors l'ordre de $\prod_{i=1}^r x_i$ est $\prod_{i=1}^r \omega(x_i)$.

f) En déduire que A possède un élément d'ordre $\exp A$. Ceci reste-t-il vrai si A n'est plus supposé abélien ?

Exercice 2 : 2-Sylow d'un groupe fini (3 points)

Soit A un groupe fini.

a) Montrer que le nombre de 2-Sylow de A est impair.

b) Soit G un 2-groupe opérant sur A par automorphismes (c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g.x$ est un automorphisme du groupe

A). Montrer qu'il existe un 2-Sylow S de A tel que $g.S = S$ pour tout g de G.

c) On admet (théorème de Feit-Thompson) que tout groupe fini d'ordre impair est résoluble. Soit N le normalisateur d'un 2-Sylow de A. Montrer que N est un groupe résoluble.

Exercice 3 : Éléments premiers d'un anneau intègre (11 points)

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K. On dit qu'un élément non nul p de A est *premier* si $(p) := pA$ est un idéal premier de A.

a) Montrer que si p est premier, alors p est irréductible.

b) On note T l'ensemble des éléments non nuls x de A qui sont inversibles ou admettent une décomposition

$$x = up_1p_2...p_r$$

avec u inversible et les p_i premiers. Montrer que A est factoriel si et seulement si $T = A - \{0\}$.

c) Soient $a, b \in A$ et p un élément premier de A. Montrer que si p^m divise ab avec $m \in \mathbf{N}^*$, alors il existe $n, s \in \mathbf{N}$ tels que : $n + s = m$, p^n divise a, et p^s divise b.

(*) d) En déduire que si a et b sont des éléments de A tels que $ab \in T$, alors a et b sont dans T.

e) Soit B l'ensemble des éléments de K de la forme x/y avec $x \in A$ et $y \in T$. Montrer que B est un sous-anneau de K et que si I est un idéal premier de B, alors $I \cap A$ est un idéal premier $\wp$ de A tel que $\wp \cap T = \emptyset$.

(*) f) On suppose qu'il existe a non nul dans A tel que $a \notin T$. Montrer qu'il existe un idéal premier $\wp$ de A tel que $a \in \wp$ et $\wp \cap T = \emptyset$ (on pourra considérer l'idéal aB de B, puis utiliser d) et e)).

g) En déduire l'énoncé suivant (critère de Kaplansky) : l'anneau A est factoriel si et seulement si tout idéal premier non nul de A contient un élement premier.