Examen d'algèbre, M1 MF (3 heures)

D. Harari, K. Destagnol, P. Lorenzon

19 décembre 2023

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Le symbole (*) désigne une question a priori plus difficile.

Exercice 1 : Indice d'un sous-groupe (6 points)

Soit G un groupe. On rappelle que l'*indice* $[G : H]$ d'un sous-groupe H de G est le cardinal de l'ensemble G/H (on pose $[G : H] = +\infty$ si cet ensemble est infini).

a) Soit N un sous-groupe de G. Montrer que $[N : (N \cap H)] \leq [G : H]$.

b) On suppose de plus $[G : H]$ fini. Montrer qu'on a égalité en a) si et seulement si $G = NH$, où NH est l'ensemble des éléments de G de la forme nh avec $n \in N$ et $h \in H$.

c) Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Soit H' un sous-groupe de G', on pose $H = f^{-1}(H')$. Montrer que si f est surjectif, $[G : H] = [G' : H']$.

(*) d) Soit p un nombre premier. Soit G un p-groupe non réduit à $\{1\}$. On suppose que G n'est pas abélien. Montrer que G possède un sous-groupe d'indice p (on pourra raisonner par récurrence sur le cardinal de G).

e) Le résultat de d) vaut-il encore si G est un p-groupe abélien ?

Exercice 2 : Dimension d'un anneau (5 points)

Soit A un anneau commutatif non nul. On appelle *dimension* de A la borne supérieure (dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$) des entiers n tels qu'il existe une suite strictement croissante d'idéaux premiers de A :

$$\wp_0 \subset \wp_1 \subset \ldots \subset \wp_n.$$

a) Montrer que A est de dimension 0 si et seulement si tout idéal premier de A est maximal.

b) Soit k un corps et n un entier naturel non nul. Déterminer les idéaux premiers de $k[X]/(X^n)$, et en déduire que $k[X]/(X^n)$ est de dimension zéro.

c) Montrer qu'un anneau principal qui n'est pas un corps est de dimension 1.

d) Montrer que si K est un corps, l'anneau $K[X_1, ..., X_n]$ est de dimension au moins n.

Exercice 3 : Modules de type fini (6 points)

On rappelle que si M est un module sur un anneau commutatif A et I est un idéal de A, on note IM le sous-module de M engendré par les ax avec $a \in I$ et $x \in M$. Soit M un A-module tel que $IM = M$. Soit $w \in M$. On pose $M' = M/(A.w)$ et on suppose qu'il existe $x \in I$ tel que $(1 + x)M' = 0$.

a) Montrer que $(1+x)M \subset I.w$, où $I.w$ est le sous-module de M constitué des éléments de la forme $a.w$ avec $a \in I$.

b) On choisit $y \in I$ tel que $(1 + x)w = yw$ (ce qui est possible d'après a)). Montrer que $(1 + x - y)(1 + x)M = 0$.

c) En déduire qu'il existe $z \in I$ tel que $(1 + z)M = 0$.

(*) d) Soit P un A-module de type fini tel que $IP = P$. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $aP = 0$ et $(a - 1) \in I$.

e) On suppose de plus que pour tout idéal maximal J de A, on a $I \subset J$. Montrer que $P = 0$.

Exercice 4 : Théorie de Galois (4 points)

On dit qu'une extension L/K de corps est *abélienne* (resp. *cyclique*) si elle est finie, galoisienne, et de groupe de Galois abélien (resp. cyclique).

a) Donner un exemple d'extension finie, galoisienne, de $\mathbf{Q}$ qui n'est pas abélienne.

b) Soit L/K une extension finie galoisienne. Soit $K \subset F \subset L$ une extension intermédiaire. On suppose que L/K est abélienne ; les extensions L/F et F/K sont elles abéliennes ? Même question en remplaçant abélienne par cyclique.

(*) c) Soient p un nombre premier et $m \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe une extension finie galoisienne L de $\mathbf{Q}$ de groupe de Galois $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$ (on pourra considérer l'extension $\mathbf{Q}(\zeta)$, où ζ est une racine primitive n-ième de l'unité avec n puissance de p bien choisie).