Feuille TD 1 – Exercices Algèbre – Groupes

Exercice 1 — Groupe symétrique. Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique sur n lettres.

1. Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_3$? de $\mathfrak{S}_4$? de $\mathfrak{S}_5$? de $\mathfrak{S}_n$?
2. Donner le treillis[1] des sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, en précisant à chaque fois lesquels des sous-groupes sont distingués. Répéter l'exercice avec le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
   Soient G un groupe et $K \subseteq H$ deux sous-groupes de G. On suppose que $K \lhd H$ et que $H \lhd G$. A-t-on $K \lhd G$? Démontrer que si K est caractéristique dans H et que H est caractéristique dans G, alors K est caractéristique dans G.
3. Une *partition d'un entier* n est une suite $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_r$ d'entiers tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$. Montrer que les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sont en bijection avec les partitions de n.

Exercice 2 — Groupe diédral. On considère les deux transformations suivantes du plan euclidien : la rotation ρ de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et la symétrie orthogonale σ par rapport à l'axe des abscisses. Le groupe *diédral* $\mathbf{D}_4$ est le sous-groupe des isométries du plan engendré par ρ et σ.

1. Calculer l'ordre de σ et de ρ. Décrire l'isométrie $\sigma\rho\sigma^{-1}$.
2. Montrer que $\mathbf{D}_4$ contient 8 éléments; caractériser ces éléments géométriquement.
3. Déterminer les classes de conjugaison dans $\mathbf{D}_4$.
4. Donner le treillis des sous-groupes de $\mathbf{D}_4$, en précisant les sous-groupes distingués.

Exercice 3 — Groupes d'exposant 2.

1. Soit G un groupe tel que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien et donner des exemples de tels groupes finis et infinis.
2. Montrer que si G est fini, il existe un entier n tel que G est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$.

Exercice 4 — Groupes de type fini. Soit G un groupe admettant une partie génératrice finie. Montrer que G est fini ou dénombrable. Est-il vrai réciproquement que tout groupe dénombrable admet une partie génératrice finie ?

Exercice 5. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice fini m. On note G/H l'ensemble[2] des classes à gauche de G modulo H. Pour $g \in G$, on note $h_g : G/H \to G/H$ l'application $aH \mapsto gaH$.

1. Montrer que h_g est une bijection, et que l'application h qui envoie g sur h_g est un homomorphisme de G dans $\mathfrak{S}(G/H)$. Donner une interprétation en termes d'action de groupe.
2. Montrer que $[G : \mathrm{Ker}\,(h)]$ divise $m!$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(h)$ est contenu dans H.
4. Montrer que $[H : \mathrm{Ker}\,(h)]$ divise $(m-1)!$.
5. **Application 1** : Montrer que si H est d'indice 2 dans G, alors H est distingué dans G. Le démontrer également de façon plus élémentaire.
6. **Application 2** : Montrer que si G est un p-groupe, et si H est d'indice p dans G, alors H est distingué dans G.
7. **Application 3** : Supposons que G est fini et que $m = [G : H]$ est le plus petit diviseur premier de l'ordre de G. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 6. Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il existe un sous-groupe distingué K de G, contenu dans H, tel que $[G : K]$ divise $n!$.
   Indication : On pourra considérer l'action de G sur G/H.
2. On suppose que G est fini. Montrer que G n'est pas la réunion des conjugués gHg^{-1} de H.
3. Montrer que **2.** reste vrai si G est infini.
4. Est-ce que **2.** reste vrai si on ne suppose plus que $[G : H]$ est fini ?
5. Soit G un groupe fini agissant transitivement sur un ensemble fini X tel que $\#X \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $g \in G$ ne fixant aucun point de X.
6. Soit $k \geqslant 5$ un entier et soit H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_k$ d'indice compris entre 2 et $k-1$. Montrer que $H = \mathfrak{A}_k$. On admettra le fait que les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_k$ sont $\{1\}$, $\mathfrak{A}_k$ et $\mathfrak{S}_k$.

1. C'est-à-dire le graphe non orienté dont les sommets sont les sous-groupes de G et où une arête relie deux sous-groupes H_1 et H_2 si, et seulement si, $H_1 \subseteq H_2$ ou $H_2 \subseteq H_1$.
2. Qui n'est pas un groupe en général.

Exercice 7 — Quaternions et groupes d'ordre 8. On note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ de la forme

$$M_{a,b} := \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

On pose $H^* = H - \{0\}$.

1. Montrer que H^* est un sous-groupe non commutatif de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$.
2. On note $\mathbf{1}$ la matrice identité, et on pose $I := M_{i,0}$, $J = M_{0,1}$, $K = M_{0,i}$. Soit $\mathbf{H}_8 = \{\pm\mathbf{1}, \pm I, \pm J, \pm K\}$. Montrer que $\mathbf{H}_8$ est un sous-groupe non commutatif de cardinal 8 de H^*.
   Indication : On observera que $IJ = K = -JI$, avec des relations analogues par permutations circulaires de I, J, K.
3. Montrer que le centre et le sous-groupe dérivé de $\mathbf{H}_8$ sont tous deux égaux à $\{\pm 1\}$.
4. Montrer que l'abélianisé de $\mathbf{H}_8$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.
5. Est-ce qu'un groupe dont tous les sous-groupes sont distingués est nécessairement abélien ?

Exercice 8. On considère le groupe $G = \mathfrak{A}_4$. Soit $D(G)$ son sous-groupe dérivé. Soit V_4 le sous-groupe de G constitué de l'identité et des doubles transpositions.

1. Montrer que $V_4 \lhd G$, puis que $D(G) \subseteq V_4$. *Indication : On observera que G/V_4 est de cardinal 3.*
2. Montrer que $D(G) \neq \{1\}$ et que G ne possède pas de sous-groupe distingué de cardinal 2. En déduire que $D(G) = V_4$.
3. Montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe fini A, alors $H \lhd A$.
   Indication : Regarder les classes à gauche et à droite suivant G.
4. Soit H un sous-groupe de $G = \mathfrak{A}_4$. Montrer que si H est d'indice 2, alors $D(G) \subseteq H$ et aboutir à une contradiction.
   Indication : On considérera G/H.
   Ainsi G (qui est de cardinal 12) n'a pas de sous-groupe de cardinal 6.
5. Montrer au contraire que pour tout $d \in \mathbf{N}^*$ tel que d divise 24, le groupe $\mathfrak{S}_4$ possède un sous-groupe de cardinal d.

Exercice 9. Soient p un nombre premier et G un p-groupe fini. Soit $(A, +)$ un groupe abélien avec $A \neq \{0\}$. On suppose donnée une action de G sur A par automorphismes, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, la bijection $x \mapsto g \cdot x$ de A dans A est un automorphisme du groupe abélien A. On suppose de plus que A est *de torsion p-primaire, i.e.* pour tout $x \in A$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $p^m x = 0$.

1. Montrer que si A est fini, son cardinal est une puissance de p.
   Indication : On pourra utiliser la classification des groupes abéliens finis, ou encore le théorème de Sylow.
2. On suppose que A est fini. Montrer qu'il existe $x \neq 0$ dans A tel que pour tout $g \in G$, on ait $g \cdot x = x$.
3. On ne suppose plus A fini et soit $a \neq 0$ dans A. Montrer que le sous-groupe B de A engendré par $\{g \cdot a, g \in G\}$ est fini.
4. En déduire que le résultat de **2.** vaut encore sans l'hypothèse A fini.

Exercice 10 — Groupe des automorphismes.

1. Soient p un nombre premier et $n \in \mathbf{N}$. Établir que $\mathtt{Aut}\left((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n\right)$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_n\left(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\right)$. Pour quelles valeurs de n ce groupe est-il commutatif ?
2. ON suppose que $n \geqslant 2$. Montrer que ce groupe contient un sous-groupe distingué mais non caractéristique.
3. On considère dans cette question le cas $p = n = 2$. Montrer que $\mathtt{Aut}\left((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2\right)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 11. Montrer que tout groupe d'ordre 255 est cyclique.

Exercice 12 — Groupes résolubles.

1. Montrer que tout sous-groupe et tout groupe quotient d'un groupe résoluble est résoluble.
2. Montrer plus généralement que toute extension d'un groupe résoluble par un groupe résoluble est résoluble.
3. Donner un exemple d'un groupe résoluble qui n'est pas nilpotent.
4. Soient p et q deux nombres premiers distincts. Montrer que tout groupe d'ordre pq est résoluble.
5. Même question pour les groupes d'ordre pqr, si $p > q > r$ sont trois nombres premiers.
   Indication : On pourra évaluer le nombre d'éléments d'ordre p et le nombre d'éléments d'ordre q.
6. Même question pour les groupes d'ordre p^2q.
   Indication : On pourra être amener à comparer $1 + p$ et q.

Exercice 13 — Groupes nilpotents.
On dit qu'un sous-groupe H de G est maximal si $H \neq G$ et qu'aucun sous-groupe propre de G n'est compris strictement entre H et G.

1. Soient G un groupe fini, $N \lhd G$, $H \leqslant G$ et $\pi : G \to G/N$ la surjection canonique. Montrer que $\pi(H) \leqslant Z(G/N)$ si, et seulement si, $[H, G] \leqslant N$ où, pour $H_1, H_2 \leqslant G$, on note $[H_1, H_2]$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs de la forme $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ avec $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$.
2. On définit *la suite centrale descendante* associée à G par $C^1(G) = [G, G]$ et $C^{n+1}(G) = [G, C^n(G)]$ pour $n \in \mathbf{N}^*$. En déduire que G est nilpotent si, et seulement si, il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $C^{n_0}(G) = \{e\}$. Établir que le groupe G est alors nilpotent si, et seulement si, il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $C^{n_0}(G) = \{e\}$.
3. Montrer qu'un groupe nilpotent est résoluble. Que dire de la réciproque ?
4. Montrer que le centre d'un groupe nilpotent est non trivial.
5. Montrer que si G est nilpotent et que H est un sous-groupe de G, alors H est nilpotent.
6. Montrer que si $H \lhd G$ et que G est nilpotent, alors G/H est nilpotent.
7. On suppose H et G/H nilpotents. Le groupe G est-il nilpotent ?
8. Soient p, q, r trois nombres premiers. Montrer que tout groupe d'ordre pqr est résoluble. Un tel groupe est-il nilpotent ?
9. On suppose G fini. Montrer que G est nilpotent si, et seulement si, tout sous-groupe maximal de G est distingué et si, et seulement si, G est produit direct de ses p-Sylow pour tout nombre premier p divisant $\#G$.