

# Partiel d'algèbre, M1 (3 heures)

D. Harari, M. Gomez-Aparicio, K. Destagnol

22 octobre 2022

*Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.*

## Exercice 1 : Groupes symétriques (5 points)

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration que si  $n \geq 5$ , le seul sous-groupe distingué de  $\mathcal{S}_n$  qui ne contient pas  $\mathcal{A}_n$  est le groupe trivial.

- Montrer que l'ensemble  $X$  des 5-Sylow de  $\mathcal{S}_5$  est de cardinal 6.
- Montrer qu'il existe une opération fidèle et transitive de  $\mathcal{S}_5$  sur  $X$ .
- En déduire que le groupe  $\mathcal{S}_6$  possède un sous-groupe  $H$  d'indice 6 qui opère transitivement sur l'ensemble  $\{1, \dots, 6\}$ .
- Soit  $H'$  le sous-groupe de  $\mathcal{S}_6$  constitué des permutations qui laissent fixe l'élément 1 de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, 6\}$ . Existe-t-il  $g \in \mathcal{S}_6$  tel que  $H = gH'g^{-1}$  ?

## Exercice 2 : Automorphismes de groupes abéliens (4 points)

Soient  $p$  un nombre premier et  $n$  un entier naturel strictement positif. On note  $A$  le groupe additif  $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$ .

- Montrer que le groupe  $G := \text{Aut}(A)$  des automorphismes du groupe abélien  $A$  est isomorphe au groupe matriciel  $\text{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ .
- Pour quelles valeurs de  $n$  le groupe  $G$  est-il commutatif ?
- On suppose que  $n \geq 2$ . Montrer que  $A$  contient un sous-groupe  $H$  qui est distingué dans  $A$  mais n'est pas caractéristique dans  $A$ .

## Exercice 3 : Idéaux premiers (7 points)

Dans tout l'exercice, on désigne par  $A$  un anneau commutatif.

- Soit  $\wp$  un idéal premier de  $A$ . Soient  $I_1, \dots, I_r$  des idéaux de  $A$ , on note  $I_1 \dots I_r$  l'idéal produit (engendré par les  $x_1 \dots x_r$  avec  $x_j \in I_j$  pour tout

$j \in \{1, \dots, r\}$ ). Montrer que si  $\wp \supset I_1 \dots I_r$ , alors il existe  $j \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $\wp \supset I_j$ .

b) Soit  $I$  un idéal de  $A$ . On suppose que  $I$  n'est pas premier et que  $I \neq A$ . Montrer qu'il existe des idéaux  $I_1$  et  $I_2$  de  $A$ , contenant strictement  $I$ , et tels que  $I_1 I_2 \subset I$ .

On suppose dans toute la suite de l'exercice que  $A$  est noethérien. Un idéal premier  $\wp$  de  $A$  est dit *minimal* si le seul idéal premier de  $A$  inclus dans  $\wp$  est  $\wp$ .

c) Montrer que pour tout idéal  $I$  de  $A$ , il existe des idéaux premiers  $\wp_1, \dots, \wp_m$  de  $A$  tels que  $I \supset \wp_1 \dots \wp_m$  (on pourra raisonner par l'absurde en considérant un idéal  $I$  maximal parmi ceux qui ne vérifient pas la propriété voulue).

d) Montrer qu'il existe des idéaux premiers  $\wp_1, \dots, \wp_m$  de  $A$  tel que tout idéal premier de  $A$  contienne l'un des  $\wp_i$ .

e) En déduire que  $A$  n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

f) Décrire l'ensemble des idéaux premiers minimaux de  $A$  si  $A$  est intègre, puis si  $A = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ .

#### **Exercice 4 : Anneaux de polynômes (4 points)**

Soit  $K$  un corps. On considère la  $K$ -algèbre des polynômes  $A = K[T]$ , et la sous  $K$ -algèbre  $B = K[T^2, T^3]$  de  $A$  engendrée par  $\{T^2, T^3\}$ .

a) Quels sont les inversibles de l'anneau  $B$  ?

b) Montrer que les diviseurs de  $T^2$  dans  $A$  sont les polynômes de la forme  $aT^m$  avec  $a \in K^*$  et  $m$  entier naturel au plus égal à 2.

c) En déduire que  $T^2$  est irréductible dans  $B$ .

d) Montrer que  $B$  n'est pas un anneau factoriel.