# Corrigé du partiel d'algèbre de M1 du 22/9/22

**Exercice 1 : Groupes symétriques (5 points)**

a) On sait que $|X|$ est congru à 1 modulo 5, et divise $2^3.3 = 24$. Les seules possibilités sont 1 et 6, mais 1 est exclu sinon le 5-Sylow (qui est de cardinal 5, donc ne contient pas $\mathcal{A}_5$) serait distingué, ce qui n'est pas le cas d'après l'énoncé rappelé au début de l'exercice (1 point).

b) On sait que l'opération de $\mathcal{S}_5$ sur $X$ par conjugaison est transitive. Elle est de plus fidèle, car le noyau du morphisme $\Phi : \mathcal{S}_5 \to \mathcal{S}(X)$ (correspondant à cette opération) est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_5$ ne contenant pas $\mathcal{A}_5$ (sinon les stabilisateurs contiendraient $\mathcal{A}_5$ et le cardinal de l'unique orbite, qui est 6, serait plus petit que $|\mathcal{S}_5|/|\mathcal{A}_5| = 2$), ainsi $\ker \Phi$ est trivial (1.5 point).

c) Il suffit d'appliquer b) et de prendre l'image $H$ de $\Phi$. Comme $\Phi$ est injective, le groupe $H$ est bien de cardinal $|\mathcal{S}_5| = 5!$, donc d'indice 6 dans $\mathcal{S}(X) \simeq \mathcal{S}_6$ (qui est de cardinal 6!). De plus on a vu que $H$ opère transitivement sur l'ensemble $X$, qui est de cardinal 6 (1 point).

d) Non : en effet, comme $H'$ est le stabilisateur de 1 pour l'opération naturelle de $\mathcal{S}_6$ sur $\{1, ..., 6\}$, on voit que $gH'g^{-1}$ est le stabilisateur de $g(1)$ pour cette même opération. Or, $H$ n'est pas le stabilisateur d'un point puisqu'il agit transitivement sur $\{1, ..., 6\}$ d'après c) (1.5 point).

**Exercice 2 : Automorphismes de groupes abéliens (4 points)**

a) On observe que $A$ est un $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-espace vectoriel, et qu'un automorphisme du groupe abélien $A$ est automatiquement aussi un automorphisme $f$ de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-espace vectoriel, via la formule $f(mx) = mf(x)$, qui vaut pour tout entier $m$ et tout $x \in A$. Ainsi $\texttt{Aut}(A)$ est le groupe des automorphismes d'un $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-espace vectoriel de dimension $n$, il est donc isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ (1.5 point).

b) Si $n = 1$, le a) donne que $\texttt{Aut}(A) \simeq (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ est abélien. Si $n \geq 2$, ce n'est plus le cas, car par exemple les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne commutent pas (1.5 point).

c) Comme $A$ est abélien, tout sous-groupe est distingué. Par contre, le sous-groupe composé des éléments de la forme $(x, 0, ..., 0)$ avec $x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ n'est pas stable par l'automorphisme qui échange les deux premières coordonnées (1 point).

**Exercice 3 : Idéaux premiers (7 points)**

a) Supposons par l'absurde que $\wp$ ne contienne aucun des $I_j$, et choisissons pour chaque $j$ un $x_j \in I_j$ qui n'est pas dans $\wp$. Alors $x_1...x_r$ est dans $I_1...I_r$ mais pas dans $\wp$ (puisque $\wp$ est premier), ce qui contredit l'hypothèse $\wp \supset I_1...I_r$ (1 point).

b) Comme $I$ n'est pas premier et est différent de $A$, on peut trouver $x, y \in A$ avec $xy \in I$, mais ni $x$ ni $y$ dans $I$. Soit alors $I_1$ l'idéal engendré par $I$ et $x$, puis $I_2$ l'idéal engendré par $I$ et $y$, ils contiennent strictement $I$. Par ailleurs un élément de $I_1 I_2$ est une somme d'éléments de la forme $(i_1 + ax)(i_2 + by)$, avec $i_1 \in I$, $i_2 \in I$, et $a, b$ dans $A$. Un tel élément est de la forme $(i_1 i_2 + b i_1 y + a i_2 x + abxy)$, il est donc dans $I$ puisque $i_1$, $i_2$, et $xy$ sont dans $I$. Finalement $I_1 I_2 \subset I$ (1.5 point).

c) Si le résultat était faux, on pourrait choisir (vu que $A$ est noethérien) un un idéal $I$ maximal parmi ceux qui ne vérifient pas la propriété voulue. En particulier $I$ n'est pas premier (sinon on prend $m = 1$, $\wp_1 = I$) et on a aussi $I \neq A$ (sinon on prend $m = 1$ et pour $\wp_1$ n'importe quel idéal maximal de $A$). Appliquons alors b). Les idéaux $I_1$ et $I_2$ obtenus vérifient (par maximalité de $I$) qu'il existe des idéaux premiers $J_1, ..., J_r$ et $J'_1, ..., J'_s$ avec :

$$I_1 \supset J_1...J_r; \;\; I_2 \supset J'_1...J'_s.$$

Alors, comme $I \supset I_1 I_2$, on a $I \supset J_1...J_r J'_1...J'_s$, ce qui contredit le fait que $I$ ne vérifie pas la propriété voulue (2 points).

d) On applique c) à $I = 0$, ainsi $\wp_1...\wp_m$ est l'idéal nul. en particulier tout idéal premier de $A$ contient $\wp_1...\wp_m$, donc contient l'un des $\wp_j$ d'après a) (1 point).

e) D'après d), tout idéal premier minimal contient l'un des $\wp_i$, donc lui est égal par minimalité (0.5 point).

f) Si $A$ est intègre, l'idéal $\{0\}$ est premier et c'est clairement le seul idéal premier minimal. Si $A = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, les idéaux de $A$ sont les $I_m := m\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ avec $m$ divisant 8. Le quotient de $A$ par $I_m$ est $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, donc le seul idéal premier est obtenu pour $m = 2$, et c'est a fortiori le seul idéal premier minimal (1 point).

**Exercice 4 : Anneaux de polynômes (4 points)**

a) Les inversibles de $B$ sont inversibles dans $A$, donc ce sont des polynômes constants non nuls. Réciproquement, ceux-ci sont bien inversibles dans $B$, vu que $B$ contient toutes les constantes (0.5 point).

b) On sait que $A$ est principal, donc factoriel. La décomposition de $T^2$ en facteurs irréductibles dans $A$ est $T^2 = T.T$, ainsi les diviseurs de $T^2$ dans $A$ sont (à constante non nulle près) 1, $T$, et $T^2$ (1 point).

c) Les diviseurs de $T^2$ dans $B$ sont aussi diviseurs de $T^2$ dans $A$, donc ce sont (à constante non nulle près) 1 et $T^2$, vu que $T$ n'est pas dans $B$ : en effet les éléments de $B$ sont sommes de monômes de la forme $a(T^2)^m(T^3)^n$ avec $m, n \in \mathbf{N}$ et $a \in K$. Ainsi $T^2$ est irréductible dans $B$ (1 point).

d) L'idéal engendré par $T^2$ dans $B$ n'est pas premier car $T^2$ divise $T^6 = (T^3)^2$ dans $B$ (en effet $T^6 = (T^2)^3$) mais $T^2$ ne divise pas $T^3$ dans $B$, vu que $(T^3/T^2)$ (qui est dans l'anneau intègre $A$) n'est pas dans $B$. Ceci contredit une des propriétés des anneaux factoriels, puisque d'après c) on a que $T^2$ est irréductible dans $B$ (1.5 point).