Exercices Algèbre - Modules I

Exercice 1.
Soit A un anneau commutatif non nul.

1. Soit $f : A^r \to A^r$ une application linéaire, de matrice P dans la base canonique. Montrer que f est surjective si, et seulement si, $\det(P)$ est inversible dans A, et que ceci est équivalent à f bijective.
2. Montrer que f est injective si, et seulement si, $\det P$ et non nul et n'est pas diviseur de zéro dans A.
   Indication : Si $\det(P) = a$ *est diviseur de zéro, on fixera* b *non nul dans* A *tel que* $ab = 0$*, et on considérera un mineur* m *de taille maximale* s *dans* P *tel que* $mb \neq 0$*; puis on construira un vecteur colonne non nul annulé par* P *à partir de mineurs de taille* s *de* P.
3. En déduire que si $s > r$, une application linéaire de A^s dans A^r n'est pas injective.
4. Montrer que si un A-module M est engendré par une famille de r éléments, alors toute famille comportant au moins $r+1$ éléments dans M est liée.
5. Soit I un idéal non principal de A. Montrer que I n'est pas un A-module libre. Montrer plus généralement qu'un idéal I d'un anneau A est un sous-module libre de A, si et seulement si, I est principal et engendré par un élément non diviseur de zéro de A.

Exercice 2.
Soit A un anneau commutatif. Soit B une A-algèbre. Un élément $b \in B$ est dit *entier* sur A s'il existe $P \in A[X]$ unitaire tel que $P(b) = 0$.

1. Montrer que si $b \in B$ est entier sur A, alors le A-module $A[b]$ est de type fini.

Soit maintenant $b \in B$, on suppose qu'il existe un $A[b]$-module D qui est fidèle (*i.e.* tel que pour tout $\alpha \in A[b]$ non nul, il existe $x \in D$ tel que $\alpha \cdot x \neq 0$) et de type fini en tant que A-module. On choisit une famille génératrice $(d_1, \ldots, d_n)$ du A-module D et on écrit pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$b \cdot d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j$$

avec $a_{ij} \in A$.

2. Soit $d \in A[b]$ le déterminant de la matrice $(\delta_{ij} b - a_{ij})_{1 \leqslant i,j, \leqslant n}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Montrer que $d \cdot d_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
3. En déduire que $d = 0$, puis que b est entier sur A.
4. Montrer la réciproque de **1.** : si $b \in B$ est tel que le A-module $A[b]$ est de type fini, alors b est entier sur A. Montrer que cette condition est aussi équivalente à l'existence d'une sous-algèbre de B contenant b et de type fini en tant que A-module.
5. Montrer que si $b_1, \ldots, b_n \in B$ sont entiers sur A, alors le A-module $A[b_1, \ldots, b_n]$ est de type fini.
6. On suppose que B est un A-module de type fini. Montrer alors que tout élément de B est entier sur A (on dit alors que B est entier sur A).
7. Montrer que si C est une A-algèbre et B est entier sur A, alors $B \otimes_A C$ est entier sur C. La $A[X]$-algèbre $B[X]$ est-elle alors entière sur $A[X]$?

Exercice 3.
Soient A un anneau commutatif et B une A-algèbre. On note A_1 l'ensemble des éléments de B qui sont entiers sur A. Cet exercice fait appel aux résultats de l'exercice précédent.

1. Montrer que A_1 est un sous-anneau de B qui contient l'image de A dans B. On dit que A_1 est la *fermeture intégrale* de A dans B.
2. Soit C une B-algèbre. Montrer que si c est entier sur B et B est entier sur A, alors c est entier sur A.
3. Avec les notations de **1.**, montrer que la fermeture intégrale de A_1 dans B est A_1.

4. On suppose A intègre, de corps des fractions K. On dit que A est *intégralement clos* si la fermeture intégrale de A dans K est A. Montrer que si A est factoriel, alors A est intégralement clos, mais que l'anneau $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ n'est pas intégralement clos.

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K. Soit L une extension de K (*i.e.* un corps qui contient K). Soit $x \in L$ un élément entier sur A, on note $P \in K[X]$ le polynôme minimal de x sur K, c'est-à-dire le polynôme unitaire non nul de degré minimal de $K[X]$ qui annule x.

5. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire $Q \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $Q(x) = 0$ et P divise Q dans $K[X]$.
6. Soient $a_1, \dots, a_r$ les racines de P (dans un corps de décomposition M de P sur K). Montrer que les a_i sont entiers sur A pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$.
7. En déduire que si A est intégralement clos, alors $P \in A[X]$.
8. On prend $A = \mathbf{Z}$, $K = \mathbf{Q}$, $L = \mathbf{Q}(i\sqrt{5})$. Montrer que si $y \in L$ est entier sur $\mathbf{Z}$, il est racine d'un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ de degré 1 ou 2.
9. Montrer que $\mathbf{Z}(i\sqrt{5})$ est la fermeture intégrale de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Q}(i\sqrt{5})$. En particulier, $\mathbf{Z}(i\sqrt{5})$ est intégralement clos (mais pas factoriel).

Exercice 4.
Soit A un anneau commutatif. Soit I un ensemble ordonné filtrant (c'est-à-dire que si (i, j) sont dans I, il existe $k \in I$ tel que $k \geqslant i$ et $k \geqslant j$). Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A-modules. On suppose donné pour tout $j \geqslant i$ un morphisme de A-modules $f_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ avec $f_{ii} = \mathrm{Id}$ et $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ pour tous i, j, k de I vérifiant $i \leqslant j \leqslant k$.
On considère l'ensemble E des couples (i, x_i) avec $i \in I$ et $x_i \in M_i$ (E est l'*union disjointe* des M_i).

1. On définit une relation $\sim$ sur E par $(i, x_i) \sim (j, x_j)$ s'il existe $k \in I$ vérifiant : $k \geqslant i$, $k \geqslant j$, et $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$. Montrer que c'est une relation d'équivalence.

   On appelle *limite inductive* des M_i l'ensemble quotient M de E par cette relation et φ_i l'application de M_i dans M qui envoie x_i sur la classe de (i, x_i).
2. Montrer qu'il existe une unique structure de A-module sur M telle que les applications φ_i soient des morphismes de A-modules. On note
$$M = \varinjlim_{i \in I} M_i.$$
3. Montrer que le A-module $\bigoplus_{i \in I} M_i$ est isomorphe à une limite inductive des $\bigoplus_{i \in J} M_i$, où J est une partie finie de I.
4. Montrer que si N est un A-module, alors pour toute famille de morphismes $u_i : M_i \longrightarrow N$ vérifiant $u_j \circ f_{ij} = u_i$ si $i \geqslant j$, il existe un unique morphisme $u : M := \varinjlim_{i \in I} M_i \longrightarrow N$ tel que $u_i = u \circ \varphi_i$.
5. Montrer que
$$N \otimes_A \varinjlim_{i \in I} M_i \simeq \varinjlim_{i \in I}(N \otimes_A M_i).$$

Exercice 5.
Soient A un anneau principal et B un A-module sans torsion (*i.e.* l'égalité $\alpha x = 0$ avec $\alpha \in A$ et $x \in B$ implique $\alpha = 0$ ou $x = 0$). Soient $u : M \longrightarrow N$ un morphisme injectif de A-modules et $u_B : M \otimes_A B \longrightarrow N \otimes_A B$ le morphisme induit. Cet exercice utilise l'exercice 14.

1. Montrer que si B est un A-module de type fini, alors u_B est injectif.
2. On ne suppose plus que B est de type fini. Montrer que B est isomorphe à la limite inductive d'une famille de A-modules de type fini.
3. En déduire que le résultat de **1.** vaut encore sans l'hypothèse que B est de type fini.
4. Montrer par contre que si B est de type fini mais n'est plus supposé sans torsion, le résultat de **1.** tombe en défaut.

Exercice 6 — Exemples et contre-exemples. Soit A un anneau commutatif non nul. On suppose que A n'est pas un corps. Donner des exemples :

1. de A-modules non libres et montrer que si tout A-module est libre alors A est un corps;
2. D'une famille libre à n éléments dans A^n qui n'est pas une base;

3. D'une partie génératrice minimale qui ne soit pas une base ;

4. De sous-modules n'ayant pas de supplémentaire ;

5. De module libre ayant un sous-module qui n'est pas libre.

6. Soit A un anneau intègre et K son corps de fractions. On suppose que $K \neq A$ (*i.e.* A n'est pas un corps). Montrer que K n'est pas libre comme A-module.

Exercice 7 — Modules projectifs. Soit P un A-module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) pour tout morphisme surjectif de A-module $g : E \longrightarrow F$ et pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(P, F)$, il existe $h \in \mathrm{Hom}_A(P, E)$ tel que $f = g \circ h$;

b) pour tout morphisme surjectif $\pi : M \longrightarrow P$, il existe un morphisme $s : P \longrightarrow M$ tel que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_P$ (un tel morphisme s est appelé une section de π) ;

c) Il existe un A-module M tel que $M \oplus P$ est libre.

Un A-module P vérifiant ces propriétés est appelé *module projectif*. Montrer qu'un A-module libre est projectif et donner un exemple de $\mathbf{Z}$-module qui n'est pas projectif.

Exercice 8. Soit A un anneau, M un A-module de type fini et $\phi : M \longrightarrow A^n$ un morphisme surjectif de A-modules.

1. Montrer que ϕ admet un inverse à droite ψ (*i.e.* il existe $\psi : A^n \longrightarrow M$ tel que $\phi \circ \psi = id_{A^n}$).

2. Montrer que $M \simeq \mathrm{Ker}\phi \oplus \mathrm{Im}\psi$.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}\phi$ est de type fini.

Exercice 9 — Lemme de Nakayama. Cet exercice est en lien avec les exercices 11 et 12 de la feuille de TD III sur les anneaux.

1. Soit M un A-module de type fini et I un idéal de A. Supposons $M = IM$. Montrer qu'il existe alors $a \in I$ tel que $(1 + a)M = 0$. *Indication : Choisir* $1 + a$ *déterminant d'une matrice.*

2. En déduire que si A est local, $I = \mathcal{M}$ son idéal maximal et $M = IM$ alors $M = 0$.

3. Soit $\mathcal{R}$ le radical de Jacobson de A (*i.e.* l'intersection de de tous ses idéaux maximaux). Montrer que si $\mathcal{R}M = M$, alors $M = 0$.

4. Soit A un anneau et I un idéal de type fini de A tel que $I^2 = I$. Montrer qu'il existe $e \in A$ tel que $e^2 = e$ et $I = (e)$. On appelle un tel élément un *idempotent* de A.

Exercice 10. Soit k un corps, $P \in k[X]$ et $A = k[X]/(P)$.

1. Quelle est la dimension de A comme k-espace vectoriel ? Donnez-en une base.

2. On pose $M = \mathrm{Hom}_k(A, k)$; donner une base de M.

3. Pour $f \in A$ et $u \in M$, on définit $f \cdot u \in M$ par $(f \cdot u)(g) = u(f \cdot g)$ pour tout $g \in A$. Montrer que cette loi munit M d'une structure de A-module libre de rang 1. Donnez-en une base.

Exercice 11. Soit

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de A-modules. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $r \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$ tel que $r \circ i = \mathrm{Id}_{M'}$;

(ii) Il existe $s \in \mathrm{Hom}_A(M'', M)$ tel que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{M''}$;

(iii) Il existe $s \in \mathrm{Hom}_A(M'', M)$ tel que $M = i(M') \oplus s(M'')$;

(iv) La suite suivante est exacte pour tout A-module N

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}_A(M, M'') \longrightarrow 0\ ;$$

(v) La suite suivante est exacte pour tout A-module N

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_A(M', N) \longrightarrow 0\ .$$

Une suite vérifiant ces propriétés s'appelle une *suite scindée*.

EXERCICE 12 — CHASSE AU DIAGRAMME.

1. Soit A un anneau, et soit
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[d, "w"] \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \end{tikzcd}$$
un diagramme de morphismes de A-modules tel que les deux lignes sont exactes et $g' \circ v = w \circ g$.
Montrer qu'il existe un unique morphisme $u : L \longrightarrow L'$ tel que $f' \circ u = v \circ f$. Si v est injective, montrer que u l'est aussi.
2. Soit A un anneau, et soit
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] & 0 \\ L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
un diagramme de morphismes de A-modules tel que les deux lignes sont exactes et $f' \circ u = v \circ f$.
Montrer qu'il existe un unique morphisme $w : N \longrightarrow N'$ tel que $g' \circ v = w \circ g$. Si v est surjective, montrer que w l'est aussi.

EXERCICE 13 — LEMME DES 5. Soit A un anneau, et soit
$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "u_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "u_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "u_4"] & M_5 \arrow[d, "u_5"] \\ M_1' \arrow[r, "f_1'"] & M_2' \arrow[r, "f_2'"] & M_3' \arrow[r, "f_3'"] & M_4' \arrow[r, "f_4'"] & M_5' \end{tikzcd}$$
un diagramme de morphisme de A-modules tel que les deux lignes sont exactes et chaque carré est commutatif. Montrer les énoncés suivants.

1. Si u_2 et u_4 sont surjectives et si u_5 est injective, alors u_3 est surjective.
2. Si u_2 et u_4 sont injectives et si u_1 est surjective, alors u_3 est injective.
3. Si u_1 est surjective, u_5 est injective et u_2 et u_4 sont des isomorphismes, alors u_3 est un isomorphisme.

EXERCICE 14 — LEMME DU SERPENT. Soit A un anneau, et soit
$$\begin{tikzcd} & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' & \end{tikzcd}$$
un diagramme de morphismes de A-modules tel que les deux lignes sont exactes et $v \circ f = f' \circ u$ et $w \circ g = g' \circ v$.

1. Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Ker}(u)$ a son image contenue dans $\mathrm{Ker}(v)$. Énoncer un résultat analogue pour g.
2. Montrer que l'application $\overline{f'} : L'/\mathrm{Im}(u) \longrightarrow M'/\mathrm{Im}(v)$ définie[1] par $\overline{x} \mapsto \overline{f'(x)}$ est bien définie et énoncer un résultat similaire pour g'.
3. Définir un morphisme $\delta : \mathrm{Ker}(w) \longrightarrow L'/\mathrm{Im}(u)$.
4. Montrer que la suite
$$\mathrm{Ker}(u) \xrightarrow{f_{|\mathrm{Ker}(u)}} \mathrm{Ker}(v) \xrightarrow{g_{|\mathrm{Ker}(v)}} \mathrm{Ker}(w) \xrightarrow{\delta} L'/\mathrm{Im}(u) \xrightarrow{\overline{f'}} M'/\mathrm{Im}(v) \xrightarrow{\overline{g'}} N'/\mathrm{Im}(w)$$
est exacte.

1. On parle de *conoyaux*.

EXERCICE 15. On considère M l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$ tels que $x + y + z \equiv 0 \pmod 2$.

1. Montrer que M est un sous-$\mathbf{Z}$-module libre de type fini de rang 3 de $\mathbf{Z}^3$.
2. Donner une $\mathbf{Z}$-base de M.
3. Montrer que $\mathbf{Z}^3/M$ n'a que deux sous-modules, $\{0\}$ et lui-même. On parle de *module simple*.
4. Soient A un anneau principal, L un A-module libre de rang fini et M un sous-A-module de L. Montrer que M admet un supplémentaire dans L si, et seulement si, L/M est sans torsion. Le module M de la question précédente admet-il un supplémentaire dans $\mathbf{Z}^3$?