Exercices Algèbre - Anneaux II

Tous les anneaux de cette feuille d'exercices sont supposés être commutatif sauf mention explicite du contraire.

Exercice 1. Montrer qu'un polynôme $P(X,Y) \in \mathbf{Z}[X,Y]$ est tel que $P\left(t^2,t^3\right) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{Z}$ si, et seulement si, il existe un polynôme $Q(X,Y) \in \mathbf{Z}[X,Y]$ tel que $P(X,Y) = (X^3 - Y^2) \cdot Q(X,Y)$. En déduire un isomorphisme de $\mathbf{Z}$-algèbres

$$\mathbf{Z}[X,Y]/\left(X^3 - Y^2\right) \cong \{P \in \mathbf{Z}[T] \;:\; P'(0) = 0\} \cong \mathbf{Z}[T^2,T^3].$$

Exercice 2. Soit k un corps et N un entier naturel. On considère l'anneau de polynômes $A := k[X_1,\ldots,X_N]$, un élément $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_N)$ de k^N et un élément P de A.
Vérifier que l'on définit des idéaux de A en posant

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1,\ldots,X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}.$$

Montrer que I_1 et I_2 sont des idéaux étrangers si, et seulement si, $P(\mathbf{a}) \neq 0$. On rappelle que, par définition, I_1 et I_2 sont des idéaux étrangers de A si $I_1 + I_2 = A$.

Exercice 3 — Anneau local. Un anneau est dit *local* s'il n'admet qu'un seul idéal maximal.

1. Montrer que A est local si, et seulement si, l'ensemble de ses éléments non inversibles est un idéal et que, dans ce cas, cet idéal est l'unique idéal maximal.
2. Montrer que A est local si, et seulement si, pour tout élément $x \in A$, $1 - x$ ou x est inversible.
3. Un élément $x \in A$ est dit *idempotent* si $x^2 = x$. Montrer que si A est un anneau local, alors ses seuls idempotents sont 0 et 1. Donner un exemple d'anneau pour lequel la réciproque est fausse.
4. Soit k un corps et $n > 0$ un entier. Montrer que $k[X]/(X^n)$ est un anneau local et donner son idéal maximal.
5. Soit p un nombre premier, montrer que la localisation $\mathbf{Z}_{(p)}$ par rapport à l'idéal premier (p) est un anneau local et donner son idéal maximal.
6. L'ensemble des *germes de fonctions continues en* 0 est l'ensemble des classes d'équivalences de couples (f,U) avec U un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant 0 et $f : U \to \mathbf{R}$ continue, pour la relation d'équivalence définie par $(f,U) \sim (g,V)$ si, et seulement si, il existe un ouvert $W \subseteq U \cap V$ contenant 0 tel que $f_{|W} = g_{|W}$. Montrer que cet ensemble muni de la somme et du produit induits par ceux pour les fonctions continues est un anneau local et donner son idéal maximal.

Exercice 4. Soit $Q \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire. On note $z_1, \ldots, z_n$ ses racines (pas forcément distinctes) dans $\mathbf{C}$. Montrer que

$$\prod_{i \neq j} (z_i - z_j) \in \mathbf{Z}.$$

Exercice 5.

1. Calculer $A[X]^\times$ lorsque A est un anneau quelconque.
2. Soit B un anneau et A un sous-anneau de B. Soit $b \in B$. On dit que b est *entier* sur A s'il vérifie une équation unitaire :
$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \quad \text{avec} \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in A.$$
Un anneau intègre est dit *intégralement clos* si pour tout $x \in K = \mathrm{Frac}(A)$, si x est entier sur A alors $x \in A$.

(a) Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos.

(b) Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier sans facteur carré non nul. On pose :

$$\mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbf{C} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

Montrer que si $d \equiv 1 \pmod 4$, alors $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ n'est pas intégralement clos.
Indication : Considérer l'élément $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$.

Exercice 6. Soient K un corps et $A = K[X, Y]$. On note B la sous-algèbre de A engendrée par les XY^n pour $n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que si $Q(X, Y)$ est dans B, alors $Q(0, Y)$ est un polynôme constant.
2. Soit $r \in \mathbf{N}^\times$. Comparer les idéaux de B engendrés par $\left(X, XY, \ldots, XY^r\right)$ et $\left(X, XY, \ldots, XY^r, XY^{r+1}\right)$.
3. La K-algèbre B est-elle un anneau noethérien ? Une K-algèbre de type fini ?

Exercice 7. Soit k un corps. On note $F = k(X)$ le corps des fractions rationnelles.

1. Soient $R_1 = P_1/Q_1, \ldots, R_s = P_s/Q_s$ des éléments de F, avec $P_i \in k[X]$ et Q_i non nul dans $k[X]$ pour tout i de $\{1, \ldots, s\}$. Soit B la sous-k-algèbre de F engendrée par $R_1, \ldots, R_s$. Montrer qu'il existe un polynôme non nul $G \in k[X]$ tel que $B \subseteq (k[X])[G^{-1}]$.
2. En déduire que F n'est pas de type fini en tant que k-algèbre.

Exercice 8. Soient B un anneau, L un sous-anneau de B et A un sous-anneau de L. On suppose que L est un corps, que B est un L-espace vectoriel de dimension finie, et que B est aussi une A-algèbre de type fini. On se propose de montrer que L est une A-algèbre de type fini. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans B tels que $B = A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

1. Soit $\beta_1, \ldots, \beta_m$ une base de B sur L, avec $\beta_1 = 1$. On écrit

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j,$$

avec $a_{ijk}, b_{ij} \in L$. Soit C la sous A-algèbre de L engendrée par les a_{ijk} et les b_{ij}. Montrer que tout élément x de B s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i,$$

où les λ_i sont dans C.

2. En déduire que $L = C$, et conclure.

Exercice 9 — Lemme de Zariski. Cet exercice utilise les exercices 7 et 8. Soient $k \subset K$ deux corps, tels que K soit une k-algèbre de type fini. Le but de l'exercice est de montrer que K est un k-espace vectoriel de dimension finie. Pour cela on écrit $K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, et on raisonne par récurrence en supposant le résultat vrai jusqu'à $n - 1$, le cas $n = 0$ étant trivial.

1. On pose [1] $L = k(\alpha_1)$. Comparer K et $L[\alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, et en déduire que K est de dimension finie sur L.
2. En utilisant l'exercice 8, montrer que L est une k-algèbre de type fini.
3. En utilisant l'exercice 7, montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k.

1. C'est le corps des fractions de $k[\alpha_1]$.

4. En déduire le résultat annoncé.

Exercice 10 — Théorème des zéros de Hilbert. Cet exercice utilise le résultat de l'exercice 9. Soit k un corps.

1. Soient $a_1, \dots, a_n$ dans k. Montrer que le morphisme $u : P \mapsto P(a_1, \dots, a_n)$ de $k[X_1, \dots, X_n]$ dans k est surjectif de noyau l'idéal $J = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$.

   On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$.
2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \dots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.
   Indication : On appliquera le résultat principal de l'exercice 8.
3. En déduire qu'il existe $a_1, \dots, a_n$ dans k tel que I soit l'idéal J du **1.**, c'est-à-dire que I est l'ensemble des polynômes $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ tels que $P(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Exercice 11. Montrer que l'anneau $\mathcal{C}^0([0, 1])$ des fonctions continues $[0, 1] \to \mathbf{R}$ n'est pas noethérien. Pour ce faire, on montrera que l'idéal des fonctions s'annulant en 0 n'est pas finiment engendré.

Indication : Supposons au contraire qu'il est engendré par $f_1, \dots, f_n$. Alors la fonction $f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|}$ est une combinaison linéaire des f_i. Montrer que ceci entraîne l'existence d'un $M \in \mathbf{R}$ tel que $f \leqslant Mf^2$, et que ceci est impossible.

Exercice 12.

1. Soit A un anneau factoriel, et soit K le corps des fractions de A. Donner un exemple de polynôme réductible dans $A[X]$ et irréductible dans $K[X]$ et un exemple de polynôme irréductible dans $A[X]$ et réductible dans $K[X]$.
2. Donner les éléments irréductibles de $\mathbf{Z}[X]$ en fonction de ceux de $\mathbf{Q}[X]$ et de $\mathbf{Z}$.
3. Donner une procédure permettant de déterminer si un polynôme de degré au plus 3 est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.
4. Soit K un corps, et soient $P, Q \in K[X]$ premiers entre eux. Montrer que $P \cdot Y + Q$ est irréductible dans $K[X, Y]$.
5. Soit $a \in \mathbf{Z}$. À quelle condition $X^4 - a$ est-il irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$? et $X^4 - aX - 1$ dans $\mathbf{Z}[X]$?

Exercice 13. Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles.

1. Pour $n > 0$ et p premier, $X^n - p$ sur $\mathbf{Q}$;
2. $X^4 + X + 1$ sur $\mathbf{Q}$;
3. $X^6 + X^2 + 1$ sur $\mathbf{Q}$;
4. Pour $n > 0$, $X^n - T$ sur $K(T)$ (K un corps);
5. $1 + X + \cdots + X^{p-1}$ sur $\mathbf{Q}$, pour p premier.