Partiel d'algèbre, M1 (3 heures)

D. Harari, M. Gomez-Aparicio, K. Destagnol

22 octobre 2021

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure. Le symbole (*) désigne une question a priori plus difficile.

Exercice 1 : Groupes abéliens (6 points)

Dans tout l'exercice, on fixe un nombre premier p. Pour tout groupe abélien (noté additivement sauf mention explicite du contraire) $(A, +)$, on considère le morphisme

$$m_p : A \to A, \quad x \mapsto px$$

et on pose $A[p] := \ker m_p$, $A_p := A/pA = A/\operatorname{Im} m_p$.

a) Montrer que si A est fini, alors $A[p]$ et A_p ont même cardinal.

b) On suppose encore que A est fini. Montrer que les groupes $A[p]$ et A_p sont différents de $\{0\}$ si et seulement si p divise le cardinal de A (on pourra utiliser un théorème de Sylow).

c) Dans le cas où A est le groupe additif $\mathbf{Z}$, montrer que les groupes $A[p]$ et A_p sont finis et calculer leurs cardinaux ; même question quand A est le groupe *multiplicatif* $\mathbf{C}^*$.

(*) d) Donner un exemple de groupe A tel que $A[p]$ est fini et A_p infini, puis un exemple de groupe B tel que $B[p]$ est infini et B_p fini.

Exercice 2 : Indice d'un sous-groupe (5 points)

On rappelle que si H est un sous-groupe d'un groupe G, l'*indice* de H dans G est le cardinal de l'ensemble G/H des classes à gauche selon H. On fixe un nombre premier p et un groupe G. Un morphisme f de G dans le groupe additif $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est dit *non trivial* s'il existe $x \in G$ tel que $f(x) \neq \bar{0}$.

a) Soit f un morphisme de G dans le groupe additif $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Montrer que f est surjectif si et seulement s'il est non trivial.

b) Montrer que G contient un sous-groupe distingué H d'indice p si et seulement s'il existe un morphisme non trivial f de G dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

c) Montrer que cette dernière condition est équivalente à la suivante : il existe un morphisme non trivial de G^{ab} dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, où $G^{\mathrm{ab}} := G/D(G)$ est le quotient de G par son sous-groupe dérivé.

d) Donner un exemple de nombre premier p et de groupe fini G tel que p divise le cardinal de G, mais G ne contienne pas de sous-groupe distingué d'indice p.

Exercice 3 : Anneaux factoriels et non factoriels (6 points)

Dans tout l'exercice, on désigne par A un anneau intègre.

a) On suppose que A est factoriel. Soient a, b, c trois éléments non nuls de A. Montrer que si a est premier avec b et avec c, alors il est premier avec leur produit bc.

b) Montrer que le résultat de a) est faux dans l'anneau intègre (qui n'est pas factoriel) $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$, constitué des nombres complexes de la forme $\alpha + \beta i\sqrt{5}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$.

c) On revient au cas A intègre quelconque. Montrer que les anneaux $A[X_1, X_2]/(X_1)$ et $A[X]$ sont isomorphes.

(*) d) Montrer qu'il existe un idéal premier I de $\mathbf{Z}[X_1, X_2]$ tel que le quotient $\mathbf{Z}[X_1, X_2]/I$ ne soit pas un anneau factoriel.

Exercice 4 : Anneaux de valuation (5 points)

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K. On note comme d'habitude A^* l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau A. On suppose dans cet exercice que A est un *anneau de valuation*, c'est-à-dire que pour tout x non nul de K, on a : $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$.

a) Soient x, y deux élements non nuls de A. Montrer que x divise y ou y divise x.

b) Soient x et y deux éléments de A tels que $x \notin A^*$ et $y \notin A^*$. En utilisant a), montrer que $(x + y) \notin A^*$.

c) En déduire que l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans A^* est un idéal de A.

d) On suppose de plus que A est noethérien. Montrer que A est principal (on pourra, pour tout idéal I non nul de A engendré par r éléments, raisonner par récurrence sur r).