Examen d'algèbre, M1 (3 heures)

D. Harari, M. Gomez-Aparicio, K. Destagnol

17 décembre 2021

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure. Le symbole (*) désigne une question a priori plus difficile.

Exercice 1 : Groupes (5 points)

Soit G un groupe (noté multiplicativement). Pour tout $x \in G$, on note C_x l'ensemble des $y \in G$ tels que $xy = yx$.

a) Montrer que C_x est un sous-groupe de G.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que G est fini et n'est pas abélien. On note $g = |G|$ le cardinal de G.

b) Soit Z le centre de G. Montrer que $|Z| \leq g/4$ (on pourra considérer le quotient G/Z).

c) On note E l'ensemble des (x, y) de $G \times G$ tels que $xy = yx$. Montrer que

$$|E| = g|Z| + \sum_{x \notin Z} |C_x|,$$

puis que $|C_x| \leq g/2$ si $x \notin Z$.

d) En déduire que $\frac{|E|}{g^2} \leq 5/8$.

Exercice 2 : Anneaux (4 points)

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on dira d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) L'anneau $\mathbf{Z}/52\mathbf{Z}$ est principal.

b) Le polynôme $21X + 3$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.

(*) c) La $\mathbf{Z}$-algèbre $\mathbf{Q}$ est engendrée par une partie finie.

Exercice 3 : Modules (8 points)

Soit A un anneau commutatif. Pour tout A-module M, on note M^* l'ensemble des formes linéaires sur M, c'est-à-dire des applications A-linéaires $f : M \to A$. On munit M^* d'une structure de A-module par :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ ; \ (af)(x) = af(x) \ ,$$

pour tous $f, g \in M^*$, $x \in M$, $a \in A$.

a) Soit L un A-module libre de type fini de rang r. Montrer que L^* est encore un A-module libre de type fini de rang r (on pourra construire une base de L^* à partir d'une base de L en s'inspirant de la construction de la base duale dans les espaces vectoriels).

b) Calculer M^* quand $A = \mathbf{Z}$ et $M = \mathbf{Q}$ (on observera que $\mathbf{Q}$ est divisible).

(*) c) Soit

$$0 \to R \to L \xrightarrow{p} M \to 0$$

une suite exacte de A-modules (qui permet en particulier d'identifier R à un sous-module de L). Montrer qu'on a une suite exacte

$$0 \to M^* \xrightarrow{i} L^* \xrightarrow{u} R^*,$$

où u associe à tout $f \in L^*$ sa restriction à R, et i envoie toute forme linéaire $f : M \to A$ sur la forme linéaire $i(f) : L \to A$ définie par $i(f) = f \circ p$.

d) On suppose que M est un A-module de type fini et que A est noethérien. Montrer que M^* est un A-module de type fini, et qu'il est libre si on suppose de plus A principal.

e) On suppose que A est un anneau principal. Soit M un A-module de type fini. Montrer que $M^* = 0$ si et seulement si M est un A-module de torsion. Est-ce encore vrai si M n'est plus supposé de type fini ?

Exercice 4 : Théorie de Galois (5 points)

Soit K un corps. On considère une extension galoisienne L de K et on pose $G = \mathrm{Gal}\,(L/K)$. Soit p un nombre premier, on suppose que le cardinal de G est de la forme $|G| = p^m a$ avec $m \in \mathbf{N}$ et a non divisible par p.

a) Montrer qu'il existe une extension F de K telle que $[F : K] = a$.

b) Soient F, F' deux extensions de degré a de K avec $F \subset L$ et $F' \subset L$. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(L/K)$ tel que $\sigma(F) = F'$.

(*) c) On suppose G abélien. On note e le ppcm des ordres de tous les éléments de G. Soit d un diviseur de e. Montrer qu'il existe une extension galoisienne E de K, avec $E \subset L$, telle que $\mathrm{Gal}\,(E/K) \simeq \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$.

d) Le résultat de c) vaut-il encore si G n'est pas abélien ?