Exercices Algèbre - Anneaux II

Tous les anneaux de cette feuille d'exercices sont supposés être commutatif sauf mention explicite du contraire.

EXERCICE 1. Montrer qu'un polynôme $P(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$ est tel que $P(T^2,T^3) = 0$ si, et seulement si, il existe un polynôme $Q(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$ tel que $P(X,Y) = (X^3 - Y^2) \cdot Q(X,Y)$.

EXERCICE 2. Soit k un corps et N un entier naturel. On considère l'anneau de polynômes $A := k[X_1,\dots,X_N]$, un élément $a = (a_1,\dots,a_N)$ de k^N et un élément P de A.
Vérifier que l'on définit des idéaux de A en posant

$$I_1 := (P) = P.A$$

et

$$I_2 := \{Q \in k[X_1,\dots,X_N] \mid Q(a) = 0\}.$$

Montrer que I_1 et I_2 sont des idéaux étrangers si et seulement si $P(a) \neq 0$. (Par définition, I_1 et I_2 sont des idéaux étrangers de A si $I_1 + I_2 = A$)

EXERCICE 3. Un anneau commutatif est dit *local* s'il n'admet qu'un seul idéal maximal.

1. Montrer qu'un anneau commutatif est local si, et seulement si, l'ensemble de ses éléments non inversibles est un idéal, et que dans ce cas, cet idéal est l'unique idéal maximal.
2. Montrer qu'un anneau commutatif est local si, et seulement si, pour tout élément x de cet anneau, au moins l'un de x ou $1 - x$ est inversible.
3. Un élément x est dit *idempotent* si $x^2 = x$. Montrer que si A est un anneau local, alors ses seuls idempotents sont 1 et 0. Donner un exemple d'anneau pour lequel la réciproque est fausse.
4. Soient k un corps et n un entier strictement positif. Montrer que $k[x]/(x^n)$ est un anneau local, et déterminer son idéal maximal.
5. Soit p un nombre premier, et soit $\mathbb{Z}_{(p)}$ la localisation de $\mathbb{Z}$ par rapport à l'idéal premier (p). Montrer que $\mathbb{Z}_{(p)}$ est local, et calculer son idéal maximal.
6. L'ensemble des *germes de fonctions continues en* 0 est l'ensemble des classes d'équivalence de couples (f,U), où U est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, pour la relation d'équivalence définie par : $(f,U) \sim (g,V)$ si, et seulement si, il existe un ouvert W contenu dans $U \cap V$ tel que $f|_W = g|_W$.
   Montrer que cet ensemble, muni de la somme et du produit induits par ceux pour les fonctions continues, est un anneau commutatif local.

EXERCICE 4. Soit $Q \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. On note $z_1, \dots, z_n$ ses racines (pas forcément distinctes) dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\prod_{i \neq j} (z_i - z_j) \in \mathbb{Z}.$$

EXERCICE 5.

1. Calculer $A[X]^\times$ lorsque A est un anneau quelconque.
2. Soit B un anneau et A un sous-anneau de B. Soit $b \in B$. On dit que b est *entier* sur A s'il vérifie une équation unitaire :

   $$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad \text{avec} \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in A.$$

   Un anneau intègre est dit *intégralement clos* si pour tout $x \in K = \mathrm{Frac}(A)$, si x est entier sur A alors $x \in A$.

(a) Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos.

(b) Soit $d \in \mathbb{Z}$ un entier sans facteur carré non nul. On pose :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Montrer que si $d \equiv 1 \pmod 4$, alors $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ n'est pas intégralement clos (considérer l'élément $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$).

EXERCICE 6. Soit K un corps. Soit $A = k[X, Y]$. On note B la sous-algèbre de A engendrée par les XY^n pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $Q(X, Y)$ est dans B, alors $Q(0, Y)$ est un polynôme constant.
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Comparer les idéaux de B engendrés par $(X, XY, ..., XY^r)$ et $(X, XY, ..., XY^r, XY^{r+1})$.
3. La K-algèbre B est-elle un anneau noethérien ? Une K-algèbre de type fini ?

EXERCICE 7. Soit k un corps. On note $F = k(X)$ le corps des fractions rationnelles.

1. Soient $R_1 = P_1/Q_1, ..., R_s = P_s/Q_s$ des élèments de F, avec $P_i \in k[X]$ et Q_i non nul dans $k[X]$ pour tout i de $[1, s]$. Soit B la sous-k-algèbre de F engendrée par $R_1, ..., R_s$. Montrer qu'il existe un polynôme non nul $G \in k[X]$ tel que $B \subset (k[X])[G^{-1}]$.
2. En déduire que F n'est pas de type fini en tant que k-algèbre.

EXERCICE 8. Soient B un anneau, L un sous-anneau de B et A un sous-anneau de L. On suppose que L est un corps, que B est un L-ev de dimension finie, et que B est aussi une A-algèbre de type fini. On se propose de montrer que L est une A-algèbre de type fini. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ dans B tels que $B = A[\alpha_1, ..., \alpha_n]$.

1. Soit $\beta_1, ..., \beta_m$ une base de B sur L, avec $\beta_1 = 1$. On écrit
$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j,$$
avec $a_{ijk}, b_{ij} \in L$. Soit C la sous A-algèbre de L engendrée par les a_{ijk} et les b_{ij}. Montrer que tout élément x de B s'écrit :
$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i,$$
où les λ_i sont dans C.
2. En déduire que $L = C$, et conclure.

EXERCICE 9. Cet exercice utilise les exercices 7 et 8. Soient $k \subset K$ deux corps, tels que K soit une k-algèbre de type fini. Le but de l'exercice est de montrer que K est un k-ev de dimension finie. Pour cela on écrit $K = k[\alpha_1, ..., \alpha_n]$, et on raisonne par récurrence en supposant le résultat vrai jusqu'à $n - 1$, le cas $n = 0$ étant trivial.

1. On pose $L = k(\alpha_1)$ (c'est le corps des fractions de $k[\alpha_1]$). Comparer K et $L[\alpha_2, ..., \alpha_n]$, et en déduire que K est de dimension finie sur L.
2. En utilisant l'exercice 8, montrer que L est une k-algèbre de type fini.
3. En utilisant l'exercice 7, montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k.
4. En déduire le résultat annoncé (lemme de Zariski).

EXERCICE 10. Cet exercice utilise le résultat de l'exercice 9. Soit k un corps.

1. Soient $a_1, ..., a_n$ dans k. Montrer que le morphisme $u : P \mapsto P(a_1, ..., a_n)$ de $k[X_1, ..., X_n]$ dans k est surjectif de noyau l'idéal J engendré par les polynômes $(X_1 - a_1), ..., (X_r - a_r)$.

   On suppose dans la suite que k est algébriquement clos.
2. Montrer que le corps $L = k[X_1, ..., X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k (on appliquera le résultat principal de l'exercice 5).
3. En déduire qu'il existe $a_1, ..., a_n$ dans k tel que I soit l'idéal J du a), c'est-à-dire que I est l'ensemble des polynômes $P \in k[X_1, ..., X_n]$ tels que $P(a_1, ..., a_n) = 0$ (théorème des zéros de Hilbert).

EXERCICE 11. On rappelle qu'un anneau commutatif A est *noethérien* si, pour toute chaîne d'idéaux

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots$$

de A, il existe un entier N tel que si $n \geq N$, alors $I_n = I_{n+1}$.
Montrer que l'anneau $C^0([0,1])$ des fonctions continues $[0,1] \to \mathbb{R}$ n'est pas noethérien. Pour ce faire, on montrera que l'idéal des fonctions s'annulant en 0 n'est pas finiment engendré. (Indication : supposons au contraire qu'il est engendré par $f_1, \dots, f_n$. Alors la fonction $\sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i|}$ est une combinaison linéaire des f_i. Montrer que ceci entraîne l'existence d'un M tel que $\sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i|} \leq M \sum_{i=1}^n |f_i|$, et que ceci est impossible.)

EXERCICE 12.

1. Soit A un anneau factoriel, et soit K un corps des fractions pour A contenant A. Donner un exemple de polynôme réductible dans $A[X]$ et irréductible dans $K[X]$. Donner un exemple de polynôme irréductible dans $A[X]$ et réductible dans $K[X]$.
2. Donner les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$ en fonction de ceux de $\mathbb{Q}[X]$ et de $\mathbb{Z}$.
3. Donner une procédure permettant de déterminer si un polynôme de degré ≤ 3 est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
4. Soit K un corps, et soient $P, Q \in K[X]$ premiers entre eux. Montrer que $P \cdot Y + Q$ est irréductible dans $K[X, Y]$.
5. Soit $a \in \mathbb{Z}$. À quelle condition $X^4 - a$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$? et $X^4 - aX - 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$?

EXERCICE 13. Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles.

1. pour $n > 0$ et p premier, $X^n - p$ dans $\mathbb{Q}$.
2. $X^4 + X + 1$ dans $\mathbb{Q}$.
3. $X^6 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{Q}$.
4. pour $n > 0$, $X^n - T$ dans $K(T)$ (K un corps).
5. $1 + X + \dots + X^{p-1}$ sur $\mathbb{Q}$, pour p premier.

EXERCICE 14. On considère le nombre complexe

$$\zeta := e^{2\pi i/3}$$

et l'on définit un sous-groupe additif de $\mathbb{C}$ en posant :

$$R := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\zeta.$$

1. Montrer que R est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, puis que R est isomorphe, en tant qu'anneau, à $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1).\mathbb{Z}[X]$.

2. Etablir la majoration :
$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \inf_{\alpha\in R} |z-\alpha| < 1.$$
[Il est recommandé de tracer une figure.]
3. Montrer que R est un anneau euclidien.
Quel est le groupe mutiplicatif $R^\times$ des unités de R ?
4. Dans la suite de cette partie, on désigne par p un nombre premier et l'on note $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Montrer qu'il existe des isomorphismes d'anneaux
$$R/p.R \cong \mathbb{Z}[X]/(p, X^2+X+1) \cong \mathbb{F}_p[X]/(X^2+X+1)\mathbb{F}_p[X],$$
oùl'on a posé :
$$(p, X^2+X+1) := p.\mathbb{Z}[X] + (X^2+X+1)\mathbb{Z}[X].$$
5. Montrer que, si $p \neq 3$, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Le polynôme X^2+X+1 admet un racine dans $\mathbb{F}_p$.
   (b) Le polynôme X^3-1 admet une racine $\neq 1$ dans $\mathbb{F}_p^\times$.
   (c) $p \equiv 1 \pmod 3$.
6. Montrer que, si $p \neq 3$, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $p \equiv 1 \pmod 3$.
   (b) p n'est pas premier dans R.
   (c) Il existe (x, y) dans $\mathbb{Z}^2$ tel que $p = x^2 - xy + y^2$.
7. Dans R, 3 est-il un élément premier ?