Exercices Algèbre - Anneaux I

Tous les anneaux de cette feuille d'exercices sont supposés être commutatif sauf mention explicite du contraire.

EXERCICE 1. Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

EXERCICE 2. Soit A un anneau commutatif, et soit S une partie multiplicative de A, c'est-à-dire que S contient 1, et si $s, t \in S$, alors $st \in S$. On veut définir la *localisation* $S^{-1}A$ de A par rapport à S.

1. Montrer qu'on peut définir une relation d'équivalence sur $A \times S$ comme suit : (a, s) est équivalent à (b, t) s'il existe un $u \in S$ tel que $u(at - bs) = 0$. Soit $S^{-1}A$ l'ensemble des classes d'équivalences. On écrira $\frac{a}{s}$ pour désigner la classe d'équivalence de (a, s).
2. Montrer que $S^{-1}A$, muni des opérations $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$ et $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$, est un anneau commutatif.
3. Montrer que si S contient 0, alors $S^{-1}A$ est un anneau trivial.
4. Montrer que l'application $f : A \to S^{-1}A$ définie par $a \mapsto \frac{a}{1}$ est un morphisme d'anneaux. Montrer que f est injectif si S ne contient pas de diviseurs de zéro.
5. Cas particulier : corps des fractions. Supposons que A est intègre, et que $S = A \setminus \{0\}$. Montrer que $S^{-1}A$ est un corps, appelé le *corps des fractions* de A.
6. Cas particulier : localisation en un idéal premier. Soit P un idéal premier de A. Montrer que $S = A \setminus P$ est une partie multiplicative de A. On écrit A_P pour désigner $S^{-1}A$ dans ce cas.
7. Cas particulier (suite) : Montrer que l'idéal engendré par l'image de P dans A_P est le seul idéal maximal de A_P.

EXERCICE 3. Montrer qu'un anneau A est un corps si et seulement si l'ensemble de ses idéaux a exactement deux éléments.

EXERCICE 4. Soit A un anneau factoriel. On suppose qu'il vérifie le théorème de Bezout, i.e. pour tous $a, b \in A$ premiers entre eux, il existe $u, v \in A$ avec $ua + vb = 1$.

1. Montrer que si $a, b \in A$ ont pour pgcd d, alors il existe $u, v \in A$ avec $ua + bv = d$.
2. Montrer que si une famille finie $a_1, ..., a_n$ d'éléments de A a pour pgcd 1, alors il existe des éléments $u_1, ..., u_n$ de A avec $\sum_{i=1}^{n} u_i a_i = 1$.
3. Montrer que si I est un idéal de A, alors il existe une famille finie d'éléments de I dont le pgcd est le pgcd de tous les éléments de I.
4. En déduire que A est principal.

EXERCICE 5. Soit A un anneau intègre. On dit que deux idéaux I et J de A sont *étrangers* si $I + J = A$ (de manière équivalente, cela signifie que 1 appartient à l'idéal $I + J$).

1. Montrer que si I_1 et I_2 sont tous deux étrangers avec J, alors l'idéal $I_1 I_2$ (constitué des sommes d'éléments de la forme $a_1 a_2$ avec $a_1 \in I_1$ et $a_2 \in I_2$) est encore étranger avec J.
2. On suppose que A est factoriel et que tout idéal premier non nul de A est maximal. Montrer que si $p \in A$ est irréductible et ne divise pas a, alors (p) est étranger avec (a).
3. On garde les hypothèses de b). Montrer que si $a, b \in A$ sont premiers entre eux, les idéaux (a) et (b) sont étrangers. En déduire que A est principal en utilisant l'exercice 4 de cette feuille.

EXERCICE 6. Dans l'anneau $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, trouver deux éléments qui n'ont pas de pgcd.

EXERCICE 7. Soit H l'anneau des fonctions holomorphes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que H est intègre. Quel est son corps des fractions ?
2. Montrer que H^* est constitué des fonctions qui ne s'annulent pas, et que l'ensemble des irréductibles de H est constitué des fonctions qui ont un seul zéro avec de plus ce zéro simple.
3. Montrer que H n'est ni factoriel ni noethérien, en exhibant un élément non inversible qui ne se décompose pas en produit d'irréductibles.

EXERCICE 8. Pour un anneau commutatif A et un idéal I de A, on définit le *radical de I* comme étant l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \geq 1 \text{ tel que } x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A et que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
2. Montrer que si P est un idéal premier de A, alors $\sqrt{P} = P$.
3. Soit $x \notin \sqrt{I}$ et soit $S = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que S est une partie multiplicative de A qui est disjointe de I. En considérant l'anneau $S^{-1}A$, en déduire qu'il existe un idéal premier P contenant I mais pas x.
4. En déduire que $\sqrt{I}$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de A contenant I (on suppose ici que I est différent de A).
5. Le *nilradical* de A est l'ensemble de tous les éléments *nilpotents* de A :

   $$\mathcal{N}(A) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^n = 0\}.$$

   Montrer que le nilradical de A est un idéal, et que c'est l'intersection de tous les idéaux premiers de A.

EXERCICE 9. Soit $\mathbb{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauss.

1. Soit p un nombre premier. Montrer que p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si, et seulement si, p ne s'écrit pas comme somme de deux carrés d'entiers.
2. Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4. Montrer que si pour deux entiers a et b, on a $a^2 + b^2 \equiv 0 \bmod p$, alors p divise a et b. (Indication : on pourra calculer $(p-1)! \bmod p$).
3. Montrer qu'une somme de deux carrés d'entiers est congrue à 0, 1 ou 2 modulo 4.
4. En déduire qu'un nombre premier p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si, et seulement si, $p \equiv 3 \bmod 4$.

EXERCICE 10. Soit A le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par $\alpha = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$. Le but de cet exercice est de montrer que A est principal, mais pas euclidien.

1. Montrer d'abord que, si B est un anneau euclidien, alors il existe un élément non inversible $x \in B$ tel que la restriction à $B^* \cup \{0\}$ de la projection de B sur $B/(x)$ soit surjective. Ceci nous servira de critère pour montrer que l'anneau A n'est pas euclidien.
2. Donner un polynôme du second degré à coefficients entiers P s'annulant en α. En déduire que A est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/P$ et que le groupe abélien sous-jacent à A est engendré par 1 et α. Vérifier que l'application norme, qui à $z \in A$ associe $N(z) = z\overline{z}$, prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Montrer que 1 et -1 sont les seuls éléments inversibles de A.
4. Montrer qu'il n'existe pas de morphisme surjectif d'anneaux de A dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (indication : pour chacun des deux cas, supposer que f soit une telle surjection, et étudier l'image par f du polynôme trouvé en (2)).
5. En déduire que A n'est pas euclidien (indication : utiliser le critère de (1)).
6. Montrer que A est principal.

EXERCICE 11. Le *radical de Jacobson* d'un anneau commutatif A est l'intersection de tous les idéaux maximaux de A. On le note $\operatorname{rad} A$.

1. Soit A un anneau. Montrer qu'un élément a est dans le radical de A si, et seulement si, pour tout $x \in A$, $1 - ax$ est inversible.
2. Toujours en supposant que A est commutatif, montrer que si $x \in A$ est nilpotent, alors $1 - ax$ est inversible, $\forall a \in A$.
3. Toujours dans le cas commutatif, montrer que le radical de A est le plus grand idéal de A tel que $1 - x$ est inversible pour tout $x \in \operatorname{rad} A$.
4. Toujours dans le cas où A est commutatif, soit I un idéal dont tous les éléments sont nilpotents. Montrer que $I \subseteq \operatorname{rad} A$.
5. Calculer le radical de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (pour un entier $n > 1$).

EXERCICE 12. Soit A un anneau euclidien de stathme φ. Montrer que

1. pour tout $a \in A \setminus \{0\}$, $\varphi(a) \geq \varphi(1)$;
2. $\varphi(a) = \varphi(1)$ si, et seulement si, a est inversible dans A ;
3. si $a, b \in A \setminus \{0\}$ sont associés, alors $\varphi(a) = \varphi(b)$;
4. si $a, b \in A \setminus \{0\}$ sont tels que a divise b et $\varphi(a) = \varphi(b)$, alors a et b sont associés.