Exercices Algèbre - Groupes II

Exercice 1.

1. Montrer que les groupes
$$\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/90\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/25\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}/100\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/30\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$$
sont isomorphes.
2. Montrer qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ pour un certain nombre premier p.
3. Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 360 ? Plus généralement de cardinal n avec $n \geqslant 1$ un entier naturel ?
4. Décomposer le groupe $G = (\mathbf{Z}/187\mathbf{Z})^\times$ sous la forme donnée par le théorème de structure des groupes abéliens de type fini.

Exercice 2. Montrer que tout groupe d'ordre 255 est cyclique.

Exercice 3 — Isomorphismes exceptionnels. Soit n un entier. Soit E le K-ev K^n. On note $\mathbf{P}(E)$ l'ensemble des droite vectorielles de K^n (*espace projectif de dimension* $n-1$).

1. Montrer qu'il existe un morphisme injectif Φ de $\mathrm{PGL}_n(K)$ dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}(\mathbf{P}(E))$.

   Dans toute la suite de cet exercice, on prend $n = 2$.
2. Montrer que $\mathbf{P}(E)$ est de cardinal $q+1$; on identifie Φ à un morphisme $\mathrm{PGL}_2(K) \to \mathfrak{S}_{q+1}$.
3. On prend $q = 2$. Montrer que Φ induit des isomorphismes de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_2)$ sur $\mathfrak{S}_3$.
4. On prend $q = 3$. Montrer que Φ induit un isomorphisme de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_3)$ sur $\mathfrak{S}_4$ et de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_3)$ sur $\mathfrak{A}_4$. Les groupes $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_3)$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ sont-ils isomorphes ?
5. On prend $q = 5$. Montrer que Φ induit un isomorphisme de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5)$ sur $\mathfrak{S}_5$ et de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5)$ sur $\mathfrak{A}_5$ (on rappelle que tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$ pour $n \geqslant 5$, conséquence non triviale de la simplicité des groupes alternés).
6. Montrer que $\mathrm{SL}_3(\mathbf{F}_2)$ est simple.
7. Soit G simple d'ordre 168. Montrer que G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$.
8. Montrer que l'on a un isomorphisme entre $\mathrm{SL}_3(\mathbf{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$.

Exercice 4. Trouver un groupe fini G non réduit au neutre tel que : le centre de G est 1, le sous-groupe dérivé de G est G, mais G n'est pas simple.

Exercice 5. On suppose qu'il existe un groupe simple G d'ordre 180.

1. Montrer que G contient trente-six 5-Sylow.
2. Montrer que G contient dix 3-Sylow puis que deux 3-Sylow distincts ne peuvent pas contenir un même élément $g \neq e$.
3. Conclure.

Exercice 6. Soient p et q deux nombres premiers distincts.

1. Soit G un groupe simple d'ordre $p^\alpha m$ avec $\alpha \geqslant 1$ et $p \nmid m$. On note n_p le nombre de p-Sylow de G. Montrer que $\#G$ divise $n_p!$.
2. Montrer qu'un groupe d'ordre $p^m q^n$ avec $p < q$, $1 \leqslant m \leqslant 2$ et $n \geqslant 1$ n'est pas simple.
3. Montrer qu'un groupe d'ordre $p^2 q$ ou $p^3 q$ n'est pas simple. Classifier les groupes d'ordre $p^2 q$.
4. Montrer qu'un groupe non commutatif d'ordre < 60 n'est pas simple.

Exercice 7 — Groupes résolubles.

1. Montrer que tout sous-groupe et tout groupe quotient d'un groupe résoluble est résoluble.
2. Donner un exemple d'un groupe résoluble qui n'est pas nilpotent.
3. Soient p et q deux nombres premiers distincts. Montrer que tout groupe d'ordre pq est résoluble.
4. Même question pour les groupes d'ordre pqr, si $p > q > r$ sont trois nombres premiers (on pourra évaluer le nombre d'éléments d'ordre p et le nombre d'éléments d'ordre q).
5. Même question pour les groupes d'ordre $p^2 q$ (on pourra être amener à comparer $1 + p$ et q).

Exercice 8 — Groupes simples d'ordre 60. Soit G un groupe simple d'ordre 60. On veut montrer que G est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$.

1. Montrer que G admet six 5-Sylow.
2. En déduire qu'il existe un sous-groupe G' de $\mathfrak{A}_6$, d'indice 6, qui est isomorphe à G.
3. En faisant agir G' sur le quotient $\mathfrak{A}_6/G'$, plonger G' dans $\mathfrak{S}_5$.

4. Conclure.

Exercice 9. Soient H et N des groupes et soient φ et $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ des morphismes. On veut trouver des conditions pour que $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ soient isomorphes.

1. S'il existe un automorphisme α de H tel que $\psi = \varphi \circ \alpha$, montrer que l'on a le résultat attendu.
2. S'il existe un automorphisme u de N tel que
$$\forall h \in H, \quad \varphi(h) = u \circ \psi(h) \circ u^{-1},$$
montrer que la conclusion vaut encore.
3. Si H est cyclique et si $\varphi(H) = \psi(H)$, montrer que $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.

Exercice 10.

1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ possède un unique 2-Sylow que l'on identifiera.
2. Classifier les groupes de cardinal $\leqslant 15$.

Exercice 11. Soit p un nombre premier impair.

1. Déterminer les p-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$.
2. Soient φ et ψ des morphismes non triviaux de $\mathbf{F}_p$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$. En notant pour tout entier k, φ_k le morphisme défini par $\varphi_k(x) = \varphi(kx)$, montrer qu'il existe un entier k et une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ tels que $\psi = P\varphi_k P^{-1}$.
3. En déduire qu'il existe, à isomorphisme près, un unique produit semi-direct non trivial $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2 \rtimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
4. Montrer que le centre de ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
5. Soit G un groupe d'ordre p^3 non cyclique, contenant un élément x d'ordre p^2. Montrer que $\langle x\rangle$ est distingué dans G et que G est produit semi-direct de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ par $\langle x\rangle \cong \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$.
6. Décrire les classes d'isomorphisme de groupes de cardinal p^3 (on pourra raisonner par exemple suivant l'ordre maximal d'un élément du groupe).

Exercice 12 — Groupes nilpotents.

1. Montrer qu'un groupe nilpotent est résoluble. Que dire de la réciproque ?
2. Montrer que le centre d'un groupe nilpotent est non trivial.
3. Montrer que si G est nilpotent et que H est un sous-groupe de G, alors H est nilpotent.
4. Montrer que si $H \lhd G$ et que G est nilpotent, alors G/H est nilpotent.
5. On suppose H et G/H nilpotents. Le groupe G est-il nilpotent ?
6. Soient p, q, r trois nombres premiers. Montrer que tout groupe d'ordre pqr est résoluble. Un tel groupe est-il nilpotent ?
7. On suppose G fini. Montrer que G est nilpotent si, et seulement si, tout sous-groupe maximal de G est distingué et si, et seulement si, G est produit direct de ses p-Sylow pour tout nombre premier p divisant $\#G$.

Exercice 13 — Sous-groupe de Frattini. Soit G un groupe de type fini. On dit qu'un sous-groupe H de G est maximal si $H \neq G$ et qu'aucun sous-groupe propre de G n'est compris strictement entre H et G. On définit alors le *sous-groupe de Frattini* de G, et on note $\phi(G)$, l'intersection des sous-groupes maximaux de G.

1. Montrer que $\mathbf{Q}$ ne possède pas de sous-groupe maximal.
2. Montrer que G admet au moins un sous-groupe maximal. La démonstration se simplifie-t-elle si G est fini ?
3. Déterminer $\phi(\mathbf{Z})$ et $\phi(\mathfrak{S}_n)$.
4. Montrer que $\phi(G)$ est caractéristique. On notera $\pi : G \to G/\phi(G)$ la projection canonique.
5. Soit $S \subseteq G$ une partie de G. Montrer que S engendre G si, et seulement si, $\pi(S)$ engendre $G/\phi(G)$.
6. Montrer que $\phi(G)$ est exactement l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que pour toute partie $S \subseteq G$, on a $\langle S, g\rangle = G \quad \Rightarrow \langle S\rangle = G$.
7. Montrer que si G est fini, $\phi(G)$ est nilpotent.
8. On suppose G fini. Montrer que G est nilpotent si, et seulement si, $D(G) \subseteq \phi(G)$.
9. On suppose dans cette question que G est un p-groupe pour p un nombre premier.
   (a) Montrer que tout sous-groupe maximal de G contient $D(G)$ et le sous-groupe G^p engendré par les puissances p-ièmes dans G.
   (b) Montrer que $G/\phi(G)$ est le plus grand quotient abélien de G d'exposant p.
   (c) Que peut-on en déduire sur le nombre minimal de générateurs de G ?
   (d) Montrer que $\phi(G) = D(G) \cdot G^p$.

Exercice 14. Soit $n \geqslant 1$.

1. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ tel que ϕ transforme toute transposition en une transposition. Montrer que ϕ est intérieur.
2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer le cardinal du commutant $Z(\sigma) = \left\{\tau \in \mathfrak{S}_n \ : \ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma\right\}$ de σ.
3. En déduire que si $n \neq 6$, on a $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$.
4. Soit $n \geqslant 5$ tel que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$. Montrer que tous les sous-groupes d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ sont conjugués.
5. En utilisant les 5-Sylow de $\mathfrak{S}_5$, montrer qu'il existe un sous-groupe H d'indice 6 de $\mathfrak{S}_6$ opérant transitivement sur $\{1, \ldots, 6\}$.
6. Construire géométriquement un sous-groupe H' de $\mathfrak{S}_6$ vérifiant les mêmes propriétés que H.
7. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \neq \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6)$.

Exercice 15. Soit G un groupe simple d'ordre 360.

1. Montrer que G admet dix 3-Sylow.
2. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{A}_{10}$. On supposera désormais que G est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_{10}$.
3. Soit S un 3-Sylow de G. Montrer que S n'est pas cyclique, et que l'on peut supposer que $N_G(S)$ est le stabilisateur de 10 dans G.
4. Montrer que tout élément non trivial de S ne fixe aucun point de $\{1, \ldots, 9\}$.
5. Montrer que l'on peut supposer que S est engendré par les éléments $x = (123)(456)(789)$ et $y = (147)(258)(369)$.
6. Montrer que le stabilisateur P de 1 dans $N_G(S)$ est cyclique d'ordre 4 et est un 2-Sylow de $N_G(S)$. on note z un générateur de P.
7. Montrer qu'on peut supposer que $z = (2437)(5698)$.
8. Soit T un 2-Sylow de G contenant z. Montrer que $T = \langle z, t\rangle$ avec t d'ordre 2.
9. Montrer que l'on peut supposer que $t = (1\ 10)(23)(56)(89)$.
10. Montrer que $G = \langle x, y, z, t\rangle$.
11. Que peut-on en conclure pour les groupes simples d'ordre 360 ?
12. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_9) \cong \mathfrak{A}_6$.