Algèbre M1 2020-2021

David Harari

July 17, 2020

(*)=paragraphe plus spécialisé, qu'on traitera en cours si le temps le permet, et qui pourra faire l'objet sinon d'exercices en TD.

1. Groupes

1.1. Quelques rappels

Il s'agit en grande partie de rappels de L3, on ira donc assez vite en esquissant les démonstrations.

Notations, premiers exemples de groupes, de morphismes, et de sous-groupes.

Sous-groupe engendré, ordre d'un élément, th. de Lagrange, sous-groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Sous-groupes distingués et caractéristiques, groupes quotients, théorèmes de factorisation.

Centre et sous-groupe dérivé.

1.2. Groupes finis

Opérations de groupes, équations aux classes, formule de Burnside.

p-groupes, théorèmes de Sylow.

Structure de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$.

Th. de structure des groupes abéliens finis (démonstration directe en exercice, via les modules plus tard dans le cours).

1.3. Quelques notions supplémentaires liées aux sous-groupes distingués

Suites exactes.

Produit semi-direct. (*)
Groupes simples (exemples).
Groupes résolubles, nilpotents.

2. Anneaux commutatifs

2.1. Généralités

Anneaux intègres, corps, corps des fractions.
Idéaux, anneaux quotients, idéaux premiers et maximaux.

2.2. Divisibilité dans les anneaux intègres

Élements irréductibles, éléments associés.
Anneaux euclidiens, principaux, factoriels.

2.3. Anneaux de polynômes

Anneaux noethériens, cas de $A[X]$.
Factorialité de $A[X]$, critère d'Eisenstein.
Polynômes symétriques. (*)

3. Modules sur un anneau commutatif

3.1. Généralités

Sous-modules, somme directe de modules, premiers exemples.
Modules libres, modules de type fini, rang d'un module libre.
Sous-modules d'un module libre/de type fini, modules noethériens, exemples et contre-exemples.

3.2. Produit tensoriel de deux modules sur un anneau commutatif A (*)

Définition, propriété universelle, exemples.
Produit tensoriel de deux A-algèbres.

3.3. Modules sur un anneau principal

Théorème de la base adaptée, diviseurs élémentaires, théorème de structure des modules de type fini.

Décomposition p-primaire.

Applications : structure des groupes abéliens de type fini, équivalence des matrices à coefficients dans un anneau principal, réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel.

4. Théorie des corps, théorie de Galois

4.1. Généralités et premiers exemples

Extensions de corps, éléments algébriques, corps de rupture, corps de décomposition, clôture algébrique.

Corps finis.

Polynômes irréductibles sur $\mathbf{Q}$, sur les corps finis.

4.2. Théorie de Galois

Extensions normales, séparables.

Degré des extensions et ordre des groupes d'automorphismes.

Correspondance de Galois.

Résolution par radicaux, exemples de groupes de Galois.