Partiel d'algèbre, M1

D. Harari, M. Gomez-Aparicio, K. Destagnol

19 octobre 2020

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Exercice 1 : Vrai ou faux ? (6 points)

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on indiquera d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Si G est un groupe fini abélien et p est un nombre premier, alors G contient un unique p-Sylow.

b) Si p est un nombre premier et G est un p-groupe de cardinal au moins 2, alors le sous-groupe dérivé $D(G)$ de G vérifie : $D(G) \neq G$.

c) Soit p un nombre premier. Soit G un groupe fini vérifiant : pour tout $x \in G$, il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^{p^m} = 1$. Alors, G est un p-groupe.

d) Soit $n \geq 3$ un entier impair. Alors le groupe des automorphismes du groupe additif $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est cyclique.

Exercice 2 : Extensions de groupes (4 points)

Pour tout groupe N, on note $\mathtt{Aut}(N)$ le groupe des automorphismes de N (pour la loi $\circ$). On note $\mathtt{Int}(N)$ le sous-groupe de $\mathtt{Aut}(N)$ constitué des automorphismes intérieurs, c'est-à-dire l'image de N par le morphisme int, qui envoie tout $n \in N$ sur l'automorphisme $\mathrm{int}_n : x \mapsto nxn^{-1}$ de N.

a) Montrer que $\mathtt{Int}(N)$ est distingué dans $\mathtt{Aut}(N)$.

b) Soient G un groupe, N un sous-groupe distingué de G, et $H := G/N$. On a donc une suite exacte

$$1 \to N \to G \xrightarrow{p} H \to 1.$$

On suppose de plus que N est abélien. Montrer qu'il existe un unique morphisme $\varphi : H \to \texttt{Aut}(N)$ tel que

$$gng^{-1} = [\varphi(p(g))](n)$$

pour tous $g \in G$, $n \in N$.

Exercice 3 : Idéaux premiers (5 points)

a) Soit A un anneau principal. Soient $J, J_1, ..., J_n$ des idéaux de A avec $J \subset \bigcup_{i=1}^n J_i$. Montrer qu'il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $J \subset J_i$.

Dans toute la suite de cet exercice, on considère un anneau commutatif B. Soit I un idéal de B. Soient $P_1, ..., P_n$ des idéaux premiers de B tels que $I \subset \bigcup_{i=1}^n P_i$.

b) On suppose que $n \geq 2$ et que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, il existe $x_i \in I$ tel que $x_i \notin P_k$ pour tout $k \neq i$. En considérant $x_1 + x_2 ... x_n = x_1 + \prod_{j=2}^n x_j$, montrer qu'on aboutit à une contradiction.

c) En déduire qu'il existe $j \in \{1, ..., n\}$ tel que $I \subset P_j$.

Exercice 4 : Sous-anneaux et corps (6 points)

Soit B un anneau commutatif. Soit A un sous-anneau de B. On suppose que pour tout $b \in B$, il existe un polynôme unitaire $P \in A[X]$ tel que $P(b) = 0$.

a) Montrer que si A est un corps et B est intègre, alors B est un corps.

b) Montrer réciproquement que si B est un corps, alors A est un corps. (indication : pour $a \in A$ avec $a \neq 0$, prendre un polynôme unitaire P de degré minimal tel que $P(a^{-1}) = 0$, où $a^{-1} \in B$ est l'inverse de a).

c) Soit P un idéal premier de B, on pose $Q = P \cap A$ (c'est un idéal premier de A). Montrer que P est un idéal maximal de B si et seulement si Q est un idéal maximal de A.