Année 2013/2014
David Harari, Zhi Jiang

T.D. numéro 9

Géométrie Algébrique

Exercice 1

Soient X un schéma noethérien et $\mathcal{F}$ un faisceaux cohérent sur X. Considérons la fonction

$$\varphi(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x),$$

où $k(x)$ est le corps résiduel au point x. Utilisez le lemme de Nakayama pour montrer les résultats suivants.

1. La fonction φ est semi-continue supérieurement, c'est à dire pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble

$$\{x \in X \mid \varphi(x) \geq n\}$$

est fermé.

2. Supposons $\mathcal{F}$ localement libre et X connexe; alors φ est une fonction constante.

3. Inversement, si X est réduit et f est constante, alors $\mathcal{F}$ est localement libre.

Exercice 2 Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine avec A noethérien.

1. Tout A-module M est-il réunion de ses sous-modules de type fini ?

2. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Montrer qu'il existe toujours une famille (éventuellement infinie) $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de sous-faisceaux de $\mathcal{F}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

   (i) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, le faisceau $\mathcal{F}_\lambda$ est cohérent.

   (ii) Pour toute famille finie $J \subset \Lambda$, il existe $\beta \in \Lambda$ tel que $\mathcal{F}_\lambda$ soit un sous-faisceau de $\mathcal{F}_\beta$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

   (iii) Pour tout ouvert affine principal $V = D(g)$ de X, on a

$$\mathcal{F}(V) = \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda(V).$$

3. Soient U un ouvert non vide de X et $f : U \to X$ l'immersion ouverte associée. On considère un faisceau cohérent G sur U et un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de U par un nombre fini d'ouverts affines principaux de X.

   (a) Montrer qu'il existe un sous-faisceau cohérent $\mathcal{R}$ de $f_* G$ tel que $\mathcal{R}(U_i) = \mathcal{G}(U_i)$ pour tout $i \in I$ (on pourra utiliser 2.).

   (b) En déduire que la restriction de $\mathcal{R}$ à U est un $\mathcal{O}_U$-module isomorphe à $\mathcal{G}$.

Exercice 3 Soient X et Y des schémas intègres et noethériens de corps des fonctions respectifs $K(X)$ et $K(Y)$. On suppose que Y est normal. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et surjectif. On fait l'hypothèse que f est *birationnel*, c'est-à dire que l'homomorphisme de corps $K(Y) \to K(X)$ induit par f est un isomorphisme.

1. On suppose dans cette question 1. que $Y = \operatorname{Spec} A$ est affine et on note B la A-algèbre $\Gamma(Y, f_*\mathcal{O}_X)$.

a) Montrer que A et B ont même corps de fractions.

b) En déduire que $A = B$.

2. Montrer que $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$.

Exercice 4 Soit X un schéma noethérien. Montrer que X est affine si et seulement si X_{red} est affine. (Utilisez Théorème 8.15 (Serre), et pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$, considerez la filtration

$$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{N} \cdot \mathcal{F} \supseteq \mathcal{N}^2 \cdot \mathcal{F} \supseteq \cdots ,$$

où N est le faisceau des éléments nilpotents sur X).

Exercice 5 Soit X un schéma noethérien.

(a) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Montrer que $\mathcal{F}$ peut se plonger dans un faisceau flasque quasi-cohérent $\mathcal{Q}$.

(b) Montrer que le faisceau $\mathcal{Q}$ est un objet injectif dans la catégorie $\mathcal{Q}ch(X)$ des faisceaux quasi-cohérents sur X.

(c) Montrer que tout objet injectif de $\mathcal{Q}ch(X)$ est flasque.

(d) Conclure que on peut calculer la cohomologie comme les foncteurs dérivés de $\Gamma(X, \cdot)$, considéré comme un foncteur de $\mathcal{Q}ch(X)$ vers $\mathcal{A}b$.

Exercice 6 Soit X un schéma noethérien réduit. Montrer que X est affine si et seulement si chaque componsante irréductible de X est affine.