

T.D. numéro 8
Géométrie Algébrique

Exercice 1

Soit k un corps et soit A l'anneau de polynômes $k[x, y]$. Calculer les dimensions des fibres du morphisme canonique $f : \text{Proj} A[T_0, T_1]/(yT_0 - xT_1) \rightarrow \text{Spec} A$ et montrer que f n'est pas plat.

Exercice 2 Soit k un corps de caractéristique $\text{char} k \neq 2$. Soit $Y = \text{Spec} k[u, v]/(v^2 - u^2(u + 1))$, et soit $f : X \rightarrow Y$ la normalisation. Montrer que f est non-ramifié, surjectif, mais n'est pas étale.

Exercice 3 Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme plat entre variétés algébriques. Supposons que X_y est irréductible pour chaque point fermé $y \in Y$ et que Y est irréductible. Montrer que X est irréductible.

Exercice 4

1. Soient k un corps, $Y = \text{Spec} k[x, y]$, et $X = \text{Spec} k[x, y, z, w]/((z, w) \cap (x + z, y + w))$. Montrer que le morphisme canonique $f : X \rightarrow Y$ n'est pas plat.
2. Soient k un corps, $Y = \text{Spec} k[x, y]$, et $X = \text{Spec} k[x, y, z, w]/(z^2, zw, w^2, xz - yw)$. Montrer que $X_{\text{red}} \simeq Y$ et que le morphisme canonique $f : X \rightarrow Y$ n'est pas plat.