Année 2013/2014
David Harari, Zhi Jiang

T.D. numéro 7
Géométrie Algébrique

Exercice 1

1. Soit A un anneau et soit $Y = \mathrm{Spec}B$ un schéma affine propre sur A.
   (a) Supposons que B est engendré par un seul élément comme A-algèbre, montrer qu'il existe un morphism propre $g : Y \to \mathbb{P}^1_A$ avec un diagramme commutatif:
   $$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & \mathbb{P}^1_A \arrow[d] \\ & \mathrm{Spec}A, \end{tikzcd}$$
   et en déduire que B est fini sur A.
   (b) En déduire que B est toujours fini sur A.
2. Soit X un schéma propre sur A. Alors $\mathscr{O}_X(X)$ est entier sur A.
3. Soit X une variété algébrique réduite, propre sur un corps k. Alors $\mathscr{O}_X(X)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.
4. Soit X une variété algébrique réduite connexe, propre sur un corps k. Alors $\mathscr{O}_X(X)$ est un corps, extension finie de k.

Exercice 2 Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif. Supposons que Y est connexe et que toutes les fibres X_y de f sont connexes.

1. Montrer que si f est propre, alors X est aussi connexe.
2. Étudiez l'exemple $\mathrm{Spec}\, k[T_1, T_2]/(T_1(T_1T_2 - 1)) \to \mathrm{Spec}\, k[T_1]$, où k est un corps. En déduire que (a) est fausse si f n'est pas propre.

Exercice 3 Soient k un corps et $P(x) \in k[x]$ un polynôme unitaire.

1. Montrer que $X = \mathrm{Spec}\, k[x, y]/(y^2 - P(x))$ est intègre si et seulement si $P(x)$ n'est pas un carré.
2. Supposons que $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Montrer que X est normal si et seulement si $P(x)$ est un polynôme sans facteur carré.
3. Supposons $\mathrm{char}(k) = 2$ et k est parfait. Alors, $P(x)$ s'écrit d'une manière unique comme $P(x) = xQ_1(x)^2 + Q_2(x)^2$. Montrer que X est normal si et seulement si $P(x) \in k^*x + k[x^2]$. Montrer que si k n'est pas parfait, cette condition est suffisante.
4. Supposons que X est intègre et $\mathrm{char}(k) \neq 2$ ou k parfait. Déterminer la normalisation de X.