Année 2013/2014
David Harari, Zhi Jiang

T.D. numéro 6

Géométrie Algébrique

Exercice 1 Soit X un schéma non vide. Montrer que X est intègre ssi $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre pour tout ouvert non vide de X.

Exercice 2 Soit k un corps non dénombrable. Soit X une variété algébrique sur k avec $\dim X > 1$, $(Y_n)_n$ une suite de fermés de X, avec $\dim Y_n < \dim X$. Nous voulons montrer qu'il existe un point fermé x de X tel que $x \notin \cup_n Y_n$.

1. Montrer le résultat pour $X = \mathbb{A}_k^1$ et puis $\mathbb{A}_k^m$.
2. En utilisant la normalisation de Noether, montrer le résultat pour une variété affine arbitraire. Déduire le cas général.

Exercice 3 Une immersion de schémas est un morphisme qui est la composée d'une immersion ouverte suivie d'une immersion fermée.

(a) Soit $f : X \to Y$ une immersion. Montrer que f peut être décomposé en une immersion fermée suivie d'une immersion ouverte.

(b) Montrer que la réciproque de (a) est vraie si f est supposé quasi-compact (utiliser l'adhérence schématique de f).

(c) Soit $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux immersions, avec g quasi-compact. Montrer que $g \circ f$ est une immersion.

Exercice 4 Soit $f : X \to Y$ un k-morphisme dominant entre deux schémas intègres de type fini sur un corps k.

1. Soit Y' un fermé irréductible de Y, dont le point générique η' est contenu dans $f(X)$. Soit Z une composante irréductible de $f^{-1}(Y')$, telle que $\eta' \in f(Z)$. Montrer que $\mathrm{Codim}(Z, X) \leq \mathrm{Codim}(Y', Y)$.
2. Soit $e = \dim X - \dim Y$ la dimension relative de f. Pour tout point $y \in f(X)$, montrer que chaque composante irréductible de X_y a une dimension $\geq e$.
3. Montrer qu'il existe un ouvert dense $U \subseteq X$, tel que pour tout $y \in f(U)$, $\dim U_y = e$.
4. Pour tout entier h, soit E_h l'ensemble des points $x \in X$ tel que, en posant $y = f(x)$, il existe une composante irréductible Z de X_y contenant x, et de dimension $\geq h$. Montrer que

   (a) $E_e = X$;
   (b) Si $h > e$, alors E_h n'est pas dense dans X;
   (c) E_h est fermé, pour tout h.