Année 2013/2014
David Harari, Zhi Jiang

T.D. numéro 5

Géométrie Algébrique

Exercice 1 On dit qu'un espace topologique X est un espace de Zariski s'il est noethérien et chaque fermé irréductible non vide a un point générique unique.

(a) Montrer que si X est un schéma noethérien, alors $\mathrm{sp}(X)$ est un espace de Zariski.

(b) Montrer que tout sous-ensemble fermé minimal d'un espace de Zariski se compose d' un point.

(c) Montrer qu'un espace de Zariski X satisfait l'"axiome de séparation" suivant : étant donné deux points distincts de X, il existe un ouvert contenant un mais pas l'autre.

(d) Soit X un espace de Zariski irréductible, montrer que son point générique est contenu dans chaque ouvert non vide de X.

(e) Si x_0, x_1 sont deux points d'un espace topologique X, et si $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$, on dit alors que x_0 est une spécialisation de x_1, ou que x_1 est une géenérisation de x_0, ce qu'on écrit $x_1 \rightsquigarrow x_0$. Soit X un espace de Zariski. Montrer qu'un sous-ensemble fermé contient toute spécialisation de l'un de ses points (on dit que les fermés sont stables par spécialisation) De même, les ouverts sont stables par générisation.

Exercice 2

1. Soit Y un fermé d'un schéma X, muni de sa structure réduite de sous-schéma fermé. Soit Y' un autre sous-schéma fermé de X avec le même espace topologique sous-jacent que Y, montrer que l'immersion fermée $Y \to X$ se factorise par Y'.

2. Soit $f : Z \to X$ un morphisme. On suppose f quasi-compact ou Z réduit.

   Montrer qu'il existe un unique sous-schéma fermé Y de X avec la propriété suivante : le morphisme f se factorise par Y, et si Y' est un autre sous-schéma fermé de X par lequel f se factorise, alors $Y \to X$ se factorise aussi par Y'. Nous appelons Y l'image schématique de f. Si Z est un schéma réduit, montrer que Y est simplement l'adhérence de $f(Z)$, munie de sa structure réduite.

Exercice 3

(1) Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M}$. Soit x le point fermé de $\mathrm{Spec}A$ (correspondant à $\mathcal{M}$). Montrer que si y est un point de $\mathrm{Spec}A$, alors x appartient à l'adhérence $\overline{\{y\}}$ de y.

(2) Soit k un corps et A une k-algèbre locale dont on note $\mathcal{M}$ l'idéal maximal et L le corps résiduel. Pour tout k-schéma X, on note

$$\varphi_{X,A} : X(A) \to X(L)$$

l'application de "reduction modulo $\mathcal{M}$".

(a) Montrer que si X est l'espace affine $\mathbf{A}_k^n$, alors on a $X(A) = A^n$.

(b) Soient X un k-schéma et U un ouvert non-vide de X. Montrer que si $\varphi_{X,A}$ est surjective, alors $\varphi_{U,A}$ est surjective (on pourra utiliser (1)).

(c) Soit U un k-schéma intègre de type fini. On suppose que la condition suivante est vérifiée :

(*) Il existe un entier n, un ouvert non-vide Y de l'espace affine A_k^n, et des k-morphismes $f : U \to Y$ et $g : Y \to U$ tels que $g \circ f$ soit le morphisme identité Id_U de U.

Montrer qu'alors $\varphi_{U,A}$ est surjective.

On dira qu'un k-schéma intègre de type fini X est retract-rationnel (notion due à D. Saltman) s'il existe un ouvert non-vide U de X satisfaisant $(*)$.

(3) Soit X un k-schéma intègre de type fini. On suppose qu'il existe un ouvert non-vide V de X tel que pour toute k-algèbre locale A, l'application $\varphi_{V,A} : V(A) \to V(L)$ (où L est le corps résiduel de A) soit surjective. On se propose de montrer que X est retract-rationnele.

a) Montrer qu'on peut supposer pour cela que $V = X$, et que $X = \mathrm{Spec}B$, où B s'écrit $B = k[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{Q}$ avec $\mathcal{Q}$ idéal premier de l'anneau de polynômes $k[T_1, \ldots, T_n]$.

b) On pose $R = k[T_1, \ldots, T_n]$ et $A = R_{\mathcal{Q}}$; on note $L = \mathrm{Frac}B$ le corps des fonctions de X, qui est aussi le corps résiduel de A. Montrer qu'il existe un ouvert affine non-vide W de A_k^n et des k-morphismes $g : \mathrm{Spec}L \to W$ et $h : W \to X$ dont le composé $h \circ g : \mathrm{Spec}L \to X$ est le morphisme canonique (associé à l'inclusion $B \to L$).

c) En déduire qu'il existe un ouvert non-vide U de X et un k-morphisme $f : U \to W$ tels que $h \circ f$ soit l'immersion ouverte $U \to X$.

d) Conclure.