Année 2013/2014
David Harari, Zhi Jiang

T.D. numéro 3

Géométrie Algébrique

Exercice 1

Soit Y un schéma affine. Pour tout schéma X, montrer que l'application canonique

$$\rho : \mathrm{Mor}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{anneaux}}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$$

est bijective.

Exercice 2

Soit X un schéma sur un anneau A. On suppose qu'il existe une famille finie d'éléments $f_0, \ldots, f_n$ de $\mathcal{O}_X(X)$ vérifiant que l'idéal engendré par les f_i est $\mathcal{O}_X(X)$.

(1) Montrer que X est l'union des X_{f_i}.

(2) Montrer que nous avons un morphisme $f : X \to \mathbb{P}^n_A := \mathrm{Proj}_A[T_0, \ldots, T_n]$ tel que $f^{-1}(D_+(T_i)) = X_{f_i}$ et $f|_{X_{f_i}}$ est induit par l'homomorphisme $A[\frac{T_0}{T_i}, \ldots, \frac{T_n}{T_i}] \to \mathcal{O}_X(X_{f_i})$ donné par $\frac{T_j}{T_i} \to \frac{f_j}{f_i}$.

Exercice 3

Soient k un corps et $\mathbb{A}^{n+1}_k = \mathrm{Spec}(k[x_0, \ldots, x_n])$ l'espace affine sur k.

(a) Soit $\overrightarrow{0}$ le point de $\mathbb{A}^{n+1}_k$ correspondant a l'idéal maximal $(x_0, \ldots, x_n)$ et soit X le sous-schéma ouvert de $\mathbb{A}^{n+1}_k$ défini par $X := \mathbb{A}^{n+1}_k \setminus \overrightarrow{0}$. Soit $\rho_{\mathbb{A}^{n+1}_k, X} : k[x_0, ..., x_n] \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_k}(X)$ l'homomorphisme d'anneaux associé.

On considère $y_i = \rho_{\mathbb{A}^{n+1}_k, X}(x_i) \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_k}(X)$, montrer que $\cup_i X_{y_i} = X$. En deduire qu'on a un morphisme $f : X \to \mathbb{P}^n_k$.

(b) Décrire tous les points de $\mathbb{P}^n_k(k)$.

(c) Soit $P_1, \ldots, P_r \in k[T_0, \ldots, T_n]$ des polynômes homogènes et soit I l'idéal engendré par $P_1, \ldots, P_r$.

Décrire tous les points de $\mathrm{Proj}(k[T_0, \ldots, T_n]/I)(k)$.