Année 2013/2014
David Harari, Zhi Jiang

T.D. numéro 2
Géométrie Algébrique

Exercice 1

(1) Si X est un schéma affine, montrer qu'un ouvert principal V d'un ouvert principal U de X est principal dans X.

(2) Pour X un schéma, U et V des ouverts affines de X, montrer que tout point de $U \cap V$ a un voisinage principal à la fois dans U et V.

Exercice 2 Dans cet exercice, nous comparons certaines propriétés d'un homomorphisme d'anneaux avec le morphisme induit sur les spectres des anneaux.

(a) Soient A un anneau, $X = \mathrm{Spec}A$, et $f \in A$. Montrer que f est nilpotent si et seulement si $D(f) = \emptyset$.

(b) Soit $\phi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, et soit $f : Y = \mathrm{Spec}B \to X = \mathrm{Spec}A$ le morphisme induit de schémas affines. Montrer que ϕ est injectif si et seulement si le morphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ est injectif. Montrer que dans ce cas f est dominant, c'est à dire $f(Y)$ est dense dans X.

(c) Avec les mêmes notations, montrer que si ϕ est surjectif, alors f est un homéomorphisme de Y vers un sous-ensemble fermé de X, et $f^\sharp : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ est surjectif.

(d) Montrer la réciproque de (c): si f est un homéomorphisme de Y vers un sous-ensemble fermé de X, et $f^\sharp : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ est surjectif, alors ϕ est surjectif.

Exercice 3 Soit A un anneau. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\mathrm{Spec}A$ est non connexe;

(ii) il existe des éléments non nul e_1, $e_2 \in A$ tels que $e_1e_2 = 0$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, et $e_1 + e_2 = 1$;

(iii) A est isomorphe à un produit direct $A_1 \times A_2$ de deux anneaux non nuls.

Exercice 4

(a) Soit S un anneau gradué. Montrer que $\mathrm{Proj}(S) = \emptyset$ si et seulement si tous les éléments de S_+ sont nilpotents.

(b) Soit $\phi : S \to T$ un homomorphisme gradué d'anneaux gradués. Soit $U = \{p \in \mathrm{Proj}(T) \mid p \not\supseteq \phi(S_+)\}$. Montrer que U est un ouvert de $\mathrm{Proj}(T)$, et montrer que ϕ détermine un morphisme naturel $f : U \to \mathrm{Proj}(S)$.

(c) Le morphisme f peut être un isomorphisme même si ϕ n'en est pas un. Par exemple, supposons que ϕ_d est un isomorphisme pour tout $d \geq d_0$, où d_0 est un entier. Montrer que $U = \mathrm{Proj}(T)$ et $f : \mathrm{Proj}(T) \to \mathrm{Proj}(S)$ est un isomorphisme.