Année 2013/2014
David Harari, Zhi Jiang

T.D. numéro 1
Géométrie Algébrique

Exercice 1 Soient U un ouvert d'un espace topologique X et $\mathcal{G}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. On définit $\Gamma(U, \mathcal{G}) := \mathcal{G}(U)$.

(a) Montrer que, pour une suite exacte de faisceaux sur X, $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$,

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}') \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}'')$$

est une suite exacte de groupes.

(b) Donner un exemple, où $\mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ est un morphisme surjectif de faisceaux sur X, mais $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}'')$ n'est pas surjectif.

Exercice 2

Faisceaux flasques

Un faisceau $\mathcal{F}$ sur un espace topologique X est dit flasque si pour toute inclusion d'ouverts $V \hookrightarrow U$, l'homomorphisme de restriction $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ est surjectif.

(a) Supposons que $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ est une suite exacte de faisceaux sur X et $\mathcal{F}'$ est flasque, montrer que la suite de groupes

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}') \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}'') \to 0$$

est aussi exacte, pour tout ouvert U de X.

(b) Supposons que $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ est une suite exacte de faisceaux. Si $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$ sont flasques, alors $\mathcal{F}''$ est aussi flasque.

(c) Soit $f : X \to Y$ une application continue. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau flasque sur X, alors $f_*\mathcal{F}$ est un faisceau flasque sur Y.

Exercice 3

Faisceaux gratte-ciel

Soient X un espace topologique, P un point de X, et A un groupe abélien. On définit un préfaisceau $i_P(A)$ sur X: $i_P(A)(U) = A$ si $P \in U$ et $i_P(A)(U) = 0$, si $P \notin U$.

(a) Vérifier que $i_P(A)$ est bien un faisceau.

(b) Montrer que la tige $i_P(A)_Q = A$ si Q appartient à l'adhérence $\overline{\{P\}}$ de P, et 0 sinon.

(c) Montrer que $i_P(A)$ est isomorphe à $i_*(A_{\overline{\{P\}}})$, où $A_{\overline{\{P\}}}$ est le faisceau constant de valeur A sur $\overline{\{P\}}$ et $i : \overline{\{P\}} \hookrightarrow X$ est l'inclusion.

Exercice 4

Extension d'un faisceau par 0

Soient X un espace topologique, Z un sous-ensemble fermé, $U = X \backslash Z$ l'ouvert complémentaire de Z dans X et $i : Z \hookrightarrow X$, $j : U \hookrightarrow X$ les inclusions.

(a) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur Z. Montrer que la tige de l'image directe $(i_*(\mathcal{F}))_P$ est $\mathcal{F}_P$, si P appartient à Z, et 0 sinon. On appelle le faisceau $i_*(\mathcal{F})$ ainsi défini l'extension de $\mathcal{F}$ par zéro en dehors de Z.

(b) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur U. Soit $j_!(\mathcal{F})$ le faisceau sur X associé au préfaisceau suivant: $V \mapsto \mathcal{F}(V)$ si $V \subseteq U$, et $V \mapsto 0$ sinon. Montrer que la tige $j_!(\mathcal{F})_P$ est $\mathcal{F}_P$ si P appartient à U, et 0 sinon. Montrer que $j_!(\mathcal{F})$ est l'unique faisceau sur X ayant cette propriété et dont la restriction à U est $\mathcal{F}$. On appelle le faisceau $j_!(\mathcal{F})$ ainsi defini l'extension de $\mathcal{F}$ par zéro en dehors de U.

(c) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. Montrer qu'on a la suite exacte de faisceaux suivante :

$$0 \to j_!(\mathcal{F}|_U) \to \mathcal{F} \to i_*(\mathcal{F}|_Z) \to 0.$$