Liste de résultats d'algèbre commutative pour le cours de géométrie algébrique 2013/2014

David Harari

Par convention tous les anneaux sont supposés commutatifs.

Chapitre 1.

AC 1. Soit A un anneau. Alors tout idéal I de A autre que A est inclus dans un idéal maximal. [AM], théorème 1.3.

AC 2. Soit A un anneau. Soit I un idéal de A. Alors le radical $\sqrt{I}$ de I est l'intersection des idéaux premiers contenant I. [AM], proposition 1.14.

Chapitre 2.

AC 3. La localisation est un homomorphisme plat. [Li], corollaire 2.11 page 10.

Chapitre 3.

AC 4. Si A est un anneau noethérien, alors $A[X]$ est noethérien. [AM], théorème 7.5.

AC 5. Soient k un corps parfait de clôture algébrique $\bar{k}$ et soit K une extension de corps de k. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) L'anneau $K \otimes_k \bar{k}$ est intègre (i.e. reste un corps) ; ii) Le corps k est algébriquement fermé dans K.

cf. [La], VIII., paragraphe 4.

Chapitre 4.

AC 6. [Cohen/Seidenberg] Soit $A \to B$ un morphisme *injectif* d'anneaux. On suppose que B est entier sur A. Alors le morphisme associé $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ est surjectif, et on a $\dim A = \dim B$.

[Mat], théorème 5 p. 33.

AC 7. (Lemme de normalisation d'E. Noether) Soit A une algèbre de type fini sur un corps k. Alors il existe des éléments $y_1, ..., y_r$ de A, algébriquement indépendants sur k, tels que A soit entier sur $k[y_1, ..., y_r]$. En particulier $\dim A = r$.

Supposons en outre A intègre. Alors $\dim A$ est le degré de transcendance $\mathrm{degtr}\,(K/k)$ du corps des fractions K de A sur k. De plus pour tout idéal premier $\wp$ de A, on a

$$\dim A = \mathrm{ht}\,\wp + \dim\,(A/\wp)$$

[Mat], corollaire 1. p. 91 et corollaire 3. p. 92.

Chapitre 5.

AC 8. (Lemme de Nakayama) Soit M un module de type fini sur un anneau local R (dont on note k le corps résiduel). Alors une partie E de M engendre M si et seulement si son image $\widetilde{E}$ dans $M \otimes_R k$ engendre $M \otimes_R k$.

[Mat], (1.N), p. 12.

Chapitre 6.

AC 9. Soit A un anneau normal. Alors $A[X_1, ..., X_n]$ est normal.

[Mat], proposition 17b) p.116.

AC 10. Soit A un anneau noethérien et normal. Alors

$$A = \bigcap_{\wp \in \mathrm{Spec}\, A, \mathrm{ht}\,\wp \leq 1} A_\wp$$

(tous les anneaux étant considérés ici comme sous-anneaux du corps des fractions de A).

[Li], lemme 1.13 p. 118.

AC 11. a) (Hauptidealsatz de Krull) Soit A un anneau noethérien. Soit a un élément non inversible de A. Alors les idéaux premiers minimaux parmi ceux qui contiennent a sont de hauteur ≤ 1, et exactement 1 si a n'est pas diviseur de zéro. [Li], théorème 2.5.12. p. 71. Si A est de plus intègre, il est factoriel si et seulement si tout idéal premier de hauteur 1 est principal.

b) Soit A un anneau local noethérien. Soient $\mathcal{M}$ l'idéal maximal de A et $f \in \mathcal{M}$. Alors $\dim\,(A/fA) \geq \dim A - 1$, avec égalité si f n'est dans aucun idéal premier minimal de A (c'est le cas par exemple si f n'est pas diviseur de zéro). [Li], théorème 2.5.15. p. 72.

c) Soit A un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathcal{M}$ et de corps résiduel k. Alors

$$\dim_k \mathcal{M}/\mathcal{M}^2 \geq \dim A$$

En particulier $\dim A$ est finie.

[Mat], (12J) pp. 77-78 et p. 141, ou [Li], corollaire 5.14. p. 71.

AC 12. Si A est un anneau local régulier et $\wp \in \operatorname{Spec} A$, alors $A_\wp$ est régulier. Tout anneau local régulier est intègre et factoriel.

[Li], proposition 2.11 p. 129 ou [Mat], théorème 36 p. 121 ; [Mat], p.139 et p. 142.

AC 13. Soit A un anneau et M un A-module.

a) Si A est un anneau de Dedekind, alors M est plat si et seulement s'il est sans torsion. [Li], corollaire 2.5. p. 8.

b) Le A-module M est plat si et seulement si pour tout $\wp$ de $\operatorname{Spec} A$, le module localisé $M_\wp = M \otimes_A A_\wp$ est plat sur $A_\wp$. Un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ est plat si et seulement si pour tout $\wp \in \operatorname{Spec} B$, l'homomorphisme $A_{\varphi^{-1}(\wp)} \to B_\wp$ est plat. [Li], proposition 2.13. p. 10 et corollaire 2.15. p. 11.

c) Si A est un anneau local et M un A-module de type fini, alors M est plat si et seulement s'il est libre. [Li], théorème 2.16. p. 11.

AC 14. Soit A un anneau noethérien et soit M un A-module de type fini. Alors M est plat si et seulement si c'est un module *projectif* (=facteur direct d'un libre). Il revient au même de dire que pour tout $\wp$ de $\operatorname{Spec} A$, le module $M_\wp$ est libre sur $A_\wp$. Si de plus A est intègre, c'est encore équivalent à : pour tout $\wp$ de $\operatorname{Spec} A$, la dimension de $M \otimes_A k(\wp)$ sur le corps résiduel $k(\wp)$ est la même.

[Mil], théorème 2.9. p. 11.

AC 15. a) Le composé de deux homomorphismes plats est plat. [Li], proposition 2.2.d) p. 7.

b) Si M est plat sur A et si B est une A-algèbre, alors $M \otimes_A B$ est plat sur B. [Li], proposition 2.2.c) p. 7.

AC 16. Un morphisme plat entre des spectres d'anneaux locaux est fidèlement plat. Si $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme plat entre anneaux, alors φ satisfait le "going-down" : si $\wp_1$ et $\wp'_1$ sont deux idéaux premiers de A avec $\wp_1 \subset \wp'_1$, alors pour tout idéal premier $\wp'_2$ de B au-dessus de $\wp'_1$, il existe un idéal premier $\wp_2$ de B au-dessus de $\wp_1$ avec $\wp_2 \subset \wp'_2$.

[Mat], théorème 4 p. 33.

AC 17. Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini et surjectif entre schémas réguliers. Alors f est plat.

[Mat], chapitre 6, théorème 46.

Chapitre 8.

AC 18. Soient A un anneau noethérien, $M \subset N$ des A-modules de type fini et $\mathbf{a}$ un idéal de A. Alors pour tout $n > 0$, il existe $n' \geq n$ tel que $\mathbf{a}^n M \supset M \cap \mathbf{a}^{n'} N$.

[Mat], th. 15 p.68.

Références

[AM] M. Atiyah, I. Macdonald : *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., 1969.

[Bki] N. Bourbaki : *Algèbre commutative*, (Éléments de mathématique, Fasc. 30), chapitre 6.

[H] R. Hartshorne : *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[La] S. Lang : *Algebra*

[Li] Q. Liu : *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford University Press, 2002.

[Mat] H. Matsumura : *Commutative Algebra*, Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. 1980.

[Mil] J.S. Milne : *Étale Cohomology*, Princeton University Press 1980.

[Nag] M. Nagata : *Local rings*, J.Wiley, 1962.