# Examen du cours de M2 "Géométrie algébrique"

David Harari

23 janvier 2014; durée : 3h; notes de cours autorisées.

*Par convention, tous les anneaux, corps, et algèbres considérés sont supposés commutatifs. Tout énoncé se trouvant dans les notes de cours (même s'il y figure sans preuve) peut être utilisé sans démonstration, et on peut admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure. Le symbole (*) signale une question que l'auteur a trouvée plus difficile ou de solution plus longue à rédiger. Les quatre exercices sont indépendants.*

**Exercice 1 : Vrai ou faux ? (5 points)**

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies, et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on dira d'abord si l'assertion est vraie ou fausse) :

**1.** Soit $X$ un schéma de type fini sur un corps algébriquement clos $k$. Si $X$ est régulier, alors $X$ est intègre.

**2.** Soient $X$ et $Y$ des schémas non vides, noethériens, et de dimension finie. Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat. Alors $\dim X \geq \dim Y$.

**3.** (*) Soit $X$ un schéma de type fini sur un corps $k$. Alors pour toute extension de corps $k'/k$, le schéma $X \times_k k'$ a même dimension que $X$.

**4.** Soit $X$ un schéma projectif sur un anneau noethérien $A$, et soit $i : Y \to X$ une $A$-immersion fermée. Alors, si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible ample sur $X$, le faisceau $i^*\mathcal{L}$ est ample sur $Y$.

**Exercice 2 : $k$-points d'un $k$-schéma (6 points)**

Soit $k$ un corps et soit $X$ un schéma de type fini sur $k$. On dira que $X$ vérifie la propriété (P) si pour tout ouvert non vide $U$ de $X$, l'ensemble $U(k)$ des $k$-points de $U$ est non vide (autrement dit : $U$ contient un point fermé dont le corps résiduel est $k$).

**1.** Si $k$ est algébriquement clos, est-ce que $X$ vérifie toujours (P) ? Même question si $k$ est séparablement clos de caractéristique $p > 0$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère deux $k$-schémas de type fini $X$ et $Y$ et on pose $Z = X \times_k Y$.

**2.** Montrer que la projection $p : Z \to Y$ est un morphisme plat.

**3.** Soit $m$ un $k$-point de $Y$. Montrer que la fibre $Z_m$ de $p$ en $m$ est un $k$-schéma isomorphe à $X$.

**4.** On suppose désormais que $X$ et $Y$ vérifient (P).

a) Soit $U$ un ouvert non vide de $Z$. Montrer que l'ensemble $p(U)$ contient un $k$-point $m$ de $Y$.

b) Montrer que $Z$ vérifie (P).

### Exercice 3 : Un exemple de faisceau d'idéaux (6 points)

**1**. (*) Soit $\operatorname{Spec} A$ un schéma affine, qui est recouvert par un nombre fini d'ouverts principaux $D(g_i)$ avec $g_i \in A$. Soient $f$ et $s$ deux éléments de $A$, dont on note $f_i$ et $s_i$ les images respectives dans le localisé $A_{g_i}$. Montrer que si pour tout $i$ on a $s_i \in f_i A_{g_i}$, alors $s \in fA$.

**2.** (*) Soit $X$ un schéma. Soit $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Montrer qu'on définit un faisceau d'idéaux sur $X$ en associant à tout ouvert affine $U$ l'idéal $f_{|U}\mathcal{O}_X(U)$ de $\mathcal{O}_X(U)$ engendré par la restriction de $f$ à $U$. On notera $\mathcal{I}_f$ ce faisceau d'idéaux.

**3.** Montrer que $\mathcal{I}_f$ est quasi-cohérent.

**4.** On suppose $X$ noethérien. $\mathcal{I}_f$ est-il toujours cohérent ?

**5.** Donner un exemple de schéma $X$ et d'un élément $f \in \mathcal{O}_X(X)$ tels que $\mathcal{I}_f$ ne soit pas un faisceau inversible.

### Exercice 4 : Morphismes projectifs et cohomologie (4 points)

Soit $r$ un entier $> 0$. Soient $X$ et $Y$ des schémas noethériens. Soient $i : X \to \mathbf{P}^r_Y := \mathbf{P}^r_{\mathbf{Z}} \times_{\mathbf{Z}} Y$ une immersion fermée et $f : X \to Y$ le morphisme projectif obtenu en composant $i$ avec la deuxième projection $\mathbf{P}^r_Y \to Y$. On note $g : \mathbf{P}^r_Y \to \mathbf{P}^r_{\mathbf{Z}}$ la première projection et pour $n \in \mathbf{Z}$, on pose : $\mathcal{O}_Y(n) = g^*\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{O}_X(n) = i^*\mathcal{O}_Y(n)$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $X$, on pose $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$.

**1.** Montrer qu'il existe $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, le morphisme naturel de faisceaux $f^*f_*(\mathcal{F}(n)) \to \mathcal{F}(n)$ soit surjectif.

**2.** Montrer qu'il existe $n_1 > 0$ tel que pour tout $n \geq n_1$ et tout $i > 0$, on ait $R^i f_*(\mathcal{F}(n)) = 0$.