Partiel du cours de M2 "Géométrie algébrique"

Université Paris-Sud (D. Harari)

4 décembre 2013; durée : 2h; notes de cours autorisées.

Par convention, tous les anneaux, corps, et algèbres considérés sont supposés commutatifs. Tout énoncé se trouvant dans les notes de cours peut être utilisé sans démonstration, et on peut admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure. Les questions que l'auteur du sujet a trouvées les plus difficiles sont en général à la fin de chaque partie.

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés des points fermés relativement aux morphismes entre schémas de type fini sur un corps. Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I : Exemples et contre-exemples (9 points).

1. Soit k un corps. Soient X et Y des schémas de type fini sur k. Soit $f : X \to Y$ un k-morphisme. Montrer que si x est un point fermé de X, alors $y := f(x)$ est un point fermé de Y (on pourra considérer les corps résiduels respectifs $k(x)$ et $k(y)$ de x et y).

2. On prend $k = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{A}^1_k = \operatorname{Spec}(k[t])$, et on définit le schéma affine X par l'équation $t_1^2 + t_2^2 + 1 = 0$, c'est-à-dire que $X = \operatorname{Spec}(k[t_1, t_2]/(t_1^2 + t_2^2 + 1))$. Soit $f : X \to Y$ le k-morphisme défini par $(t_1, t_2) \mapsto t_1$, en d'autres termes f est associé à l'homomorphisme de k-algèbres $k[t] \to k[t_1, t_2]/(t_1^2 + t_2^2 + 1)$ qui envoie t sur la classe de t_1.

a) Donner un exemple de point fermé x de X dont le corps résiduel $k(x)$ est le même que le corps résiduel $k(y)$ de $y := f(x)$.

b) Donner un exemple de point fermé x de X dont le corps résiduel $k(x)$ vérifie $[k(x) : k(y)] > 1$.

3. Donner un exemple de morphisme de schémas $f : X \to Y$ tel qu'il existe un point fermé x de X, vérifiant : $y := f(x)$ n'est pas un point fermé de Y.

4. Soient X et Y des schémas de type fini sur un corps k. On note p_1, p_2 les projections respectives $X \times_k Y \to X$ et $X \times_k Y \to Y$. Soient E l'ensemble des points fermés de $X \times_k Y$, E_1 l'ensemble des points fermés de X, et E_2 l'ensemble des points fermés de Y. Montrer que l'application $E \to E_1 \times E_2$ définie par $m \mapsto (p_1(m), p_2(m))$ est surjective.

Partie II : Points de même corps résiduel (13 points).

Dans toute la suite, on désigne par k un corps de caractéristique zéro. Le but de cette partie est de démontrer l'énoncé suivant : soient X et Y des schémas de type fini sur k. Soit $f : X \to Y$ un k-morphisme tel que $\dim \overline{f(X)} \geq 1$, où $\overline{f(X)}$ est l'adhérence de $f(X)$ dans Y. Alors f vérifie la propriété :

(*) Il existe un point fermé x de X tel que si on note $y := f(x)$, le corps résiduel $k(x)$ vérifie $k(x) = k(y)$.

1. Soient $\alpha : X' \to X$, $f : X \to Y$, et $\beta : Y \to Y'$ des morphismes de k-schémas de type fini. Soit $f' = \beta \circ f \circ \alpha : X' \to Y'$, on suppose que $\dim \overline{f'(X')} \geq 1$.

a) Montrer que si f' vérifie (*), f vérifie (*).

b) En déduire qu'il suffit de montrer $(*)$ quand X est de plus supposé réduit.

c) Montrer qu'on peut en fait se ramener à X intègre pour montrer (*).

2. On suppose désormais que X est intègre. Montrer qu'on peut de plus se ramener à X et Y affines pour montrer (*).

3. On suppose désormais $X = \operatorname{Spec} B$ avec B intègre et $Y = \operatorname{Spec} A$, et on note $\varphi : A \to B$ l'homomorphisme de k-algèbres associé à f.

a) Montrer qu'on peut se ramener pour montrer (*) au cas où φ est injective et $\dim Y \geq 1$.

b) Montrer qu'alors il existe un k-homomorphisme injectif $k[t] \to A$, puis qu'on peut supposer (ce qu'on fera dans la suite) que $Y = \mathbf{A}^1_k$, i.e. $A = k[t]$.

c) Soit alors $S = A - \{0\} = k[t] - \{0\}$, et soit I un idéal maximal de $S^{-1}B$. Soit B' l'image de B dans $L := S^{-1}B/I$. Montrer que la composée $A \to B \to B'$ est injective, et conclure en utilisant le résultat algébrique suivant, que l'on admettra :

Soit C une k-algèbre de type fini, contenant $A := k[t]$ comme sous-algèbre, et telle que $L := \operatorname{Frac} C$ soit une extension finie de $k(t) = \operatorname{Frac} A$. Alors il existe un idéal maximal $\wp$ de C tel que $A/(\wp \cap A) = C/\wp$.