Corrigé de l'examen du 23 janvier 2014

David Harari

Exercice 1.

1. C'est faux : il suffit de prendre X non connexe, par exemple $X = \operatorname{Spec}(k \times k) = \operatorname{Spec} k \coprod \operatorname{Spec} k$.

2. C'est faux : soit A un anneau de valuation discrète (par exemple $A = \mathbf{Z}_p$). Posons $X = \operatorname{Spec} A$ et notons U l'ouvert obtenu en enlevant le point fermé de X. Alors $U \to A$ est une immersion ouverte, c'est donc un morphisme plat. Pourtant $\dim U = 0$ car $U \simeq \operatorname{Spec}(\operatorname{Frac} A)$ et $\dim X = \dim A = 1$.

3. C'est vrai. Par changement de base, $X_{k'} := X \times_k k'$ est de type fini sur k'. Soit x' un point fermé de $X_{k'}$ d'image $x \in X$ par la projection $f : X_{k'} \to X$. Comme f est un morphisme plat (il est obtenu par changement de base à partir de $\operatorname{Spec} k' \to \operatorname{Spec} k$) dont les fibres sont (partout localement) de dimension zéro, le théorème 6.27 donne que $\dim_{x'} X' = \dim_x X$. On conclut avec le théorème 4.9.c) et le corollaire 4.7.c) qui donnent en particulier que pour un schéma Z de type fini sur un corps, il existe un point fermé z de Z tel que $\dim Z = \dim_z Z$; on applique alors cela à X et $X_{k'}$ en notant que si x est un point fermé de X, il existe réciproquement un point fermé x' de $X_{k'}$ qui s'envoie sur x par f.

4. C'est vrai. Le théorème 7.31. dit qu'on a une A-immersion fermée $j : X \to \mathbf{P}^r_A$ et un entier $n > 0$ tel que $\mathcal{L}^n = j^*(\mathcal{O}(1))$. Alors $u := j \circ i : Y \to \mathbf{P}^r_A$ est une immersion fermée telle que

$$i^*(\mathcal{L}^n) = (i^*\mathcal{L})^n = u^*(\mathcal{O}(1)),$$

ce qui montre que $(i^*\mathcal{L})^n$ est très ample sur Y. Finalement $i^*\mathcal{L}$ est ample (l'égalité $i^*(\mathcal{L}^n) = (i^*\mathcal{L})^n$ s'obtient par exemple en comparant les tiges de ces faisceaux).

Exercice 2.

1. Si k est algébriquement clos, tout point fermé de X est un k-point (puisque son corps résiduel est une extension finie de k). D'après le théorème 4.13, X vérifie (P). Par contre ce n'est plus vrai si k est séparablement clos mais pas algébriquement clos; il suffit de prendre $X = \mathrm{Spec}\,(k[t]/t^p - a)$, où $a \notin k^p$. Alors X est le spectre d'un corps, mais n'a pas de k-point (le résultat redevient vrai si on suppose que $X \times_k \bar{k}$ est réduit, où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, par exemple si X est lisse).

2. Le morphisme p s'obtient par changement de base à partir du morphisme structural $X \to \mathrm{Spec}\, k$, qui est plat vu que k est un corps. Par conséquent p est plat.

3. Comme m est un k-point, son corps résiduel est k et il induit un morphisme $\mathrm{Spec}\, k \to Y$. Par définition, on a alors

$$Z_m = (X \times_{\mathrm{Spec}\, k} Y) \times_Y \mathrm{Spec}\, k \simeq X \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, k = X$$

d'après la proposition 2.23.

4. Le théorème 6.23 donne que $p(U)$ est un ouvert de Y, qui est non vide car p est plat. Comme Y vérifie (P), on en déduit que $p(U)$ contient un k-point.

5. Soit U un ouvert non vide de Z. D'après 4., on peut trouver un k-point m dans $p(U)$. D'après 3., la fibre Z_m vérifie (P) puisqu'elle est k-isomorphe à X. De plus, $U \cap Z_m$ est un ouvert non vide de Z_m car $m \in p(U)$. On en déduit que $U \cap Z_m$ contient un k-point z, donc c'est aussi le cas de U (le k-point z de Z_m induit un k-morphisme $\mathrm{Spec}\, k \to Z_m$ à valeurs dans U, donc aussi un k-morphisme $\mathrm{Spec}\, k \to Z$ à valeurs dans U).

Exercice 3

1. La condition s'écrit : pour tout i, il existe un élément $a_i/g_i^{m_i}$ de A tel que $s = a_i f/g_i^{m_i}$ dans A_{g_i}; ceci signifie que $sg_i^{m_i} - a_i f$ est annulé dans A par une puissance de g_i, et implique donc qu'il existe un entier $n_i > 0$ tel que $sg_i^{n_i} \in fA$. Soit $N = \max(n_i)$, alors $sg_i^N \in fA$ pour tout i. Comme les $D(g_i) = D(g_i^N)$ recouvrent $\mathrm{Spec}\, A$, on peut trouver des éléments α_i de A tels que

$$1 = \sum_i \alpha_i g_i^N,$$

ce qui donne $s \in fA$.

2. Notons f_U la restriction de f à un ouvert U. Il est immédiat que si V et U sont deux ouverts affines de X avec $V \subset U$, la restriction envoie bien tout élément de $f_U \mathcal{O}_X(U)$ sur un élément de $f_V \mathcal{O}_X(V)$. D'après la remarque qui suit la défínion 1.9., il suffit alors de vérifier les conditions de recollement vu que les ouverts affines forment une base d'ouverts (stable par intersection finie) de X. La condition d'unicité résulte de celle du faisceau $\mathcal{O}_X$, vu que pour tout ouvert affine $f_U \mathcal{O}_X(U) \subset \mathcal{O}_X(U)$.

Pour vérifier la condition d'existence sur un ouvert affine U, on peut supposer $U = X = \operatorname{Spec} A$ (quitte à remplacer X et f par U et f_U) et considérer un recouvrement ouvert de U par un nombre fini d'ouverts principaux $D(g_i)$, vu que U est quasi-compact et que les ouverts principaux forment une base de X. Soit alors, pour tout i, une section s_i de $f_i\mathcal{O}_X(U_i)$, où f_i est la restriction de f à U_i; supposons que les restrictions de s_i et s_j à $U_i \cap U_j$ coincident. Comme $\mathcal{O}_X$ est un faisceau, les sections s_i se recollent en une (unique) section $s \in A = \mathcal{O}_X(X)$. Mais le 1. nous dit alors que $s \in fA$ comme on voulait.

3. Soit $U = \operatorname{Spec} A$ un ouvert affine. Alors par définition la restriction de $\mathcal{I}_f$ à U est $\widetilde{fA}$, donc $\mathcal{I}_f$ est quasi-cohérent.

4. Oui, car dans ce cas fA est un A-module de type fini, vu que c'est un idéal d'un anneau noethérien.

5. Il suffit de prendre $X = \operatorname{Spec} A$ et f tels que f soit un diviseur de zéro dans A, par exemple $A = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $f = \bar{2}$. Alors $\mathcal{I}_f$ s'écrit $\widetilde{M}$ avec $M = fA$, et ne peut donc pas être localement libre puisqu'il existe un $h \neq 0$ dans A avec $hM = 0$ alors que $M \neq 0$.

Exercice 4.

1. Soit $x \in X$ d'image $y = f(y)$. La surjectivité d'un morphisme de faisceaux pouvant se tester sur les tiges, on peut supposer que $Y = \operatorname{Spec} A$ est affine, quitte à remplacer Y par un ouvert affine V contenant y et X par $f^{-1}(V)$. Il s'agit alors de voir que la flèche

$$f_*(\mathcal{F}(n))_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{F}(n)_x$$

est surjective. Or, le faisceau quasi-cohérent $f_*(\mathcal{F}(n))$ sur le schéma affine Y est simplement $\widetilde{f_*(\mathcal{F}(n))(Y)} = \widetilde{\mathcal{F}(n)(X)}$ et la flèche ci-dessus est donc la flèche naturelle :

$$\mathcal{F}(n)(X) \otimes_A \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{F}(n)_x.$$

Le résultat vient alors de ce que pour n assez grand, le faisceau $\mathcal{F}(n)$ est engendré par ses sections globales (Th. 7.19).

2. On peut de même supposer que $Y = \operatorname{Spec} A$, auquel cas le résultat provient de ce que pour n assez grand, on $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ pour tout $i > 0$ (Th. 9.10), vu que $R^i f_*(\mathcal{F}(n))$ est simplement ici $\widetilde{H^i(X, \mathcal{F}(n))}$.