Corrigé du partiel du cours de M2 "Géométrie algébrique"

Université Paris-Sud (D. Harari)

Partie I.

1. On sait que le corps résiduel $k(x)$ est une extension de $k(y)$, lequel contient k. Si x est un point fermé, alors le degré $[k(x) : k]$ est fini, donc a fortiori $[k(y) : k]$ est fini, donc y est un point fermé de Y (cf. Th. 4.13).

2. a) On peut prendre le point $x =$ "$(\pm i, 0)$", plus précisément le point fermé correspondant à l'idéal maximal défini par $((t_1^2 + 1), t_2)$. Son corps résiduel est $\mathbf{C}$ (comme tout point fermé de X, car X n'a pas de $\mathbf{R}$-point) et $y = f(x)$ est défini par $(t^2 + 1)$, donc est aussi de corps résiduel $\mathbf{C}$.

b) On prend $x =$ "$(0, \pm i)$" correspondant à l'idéal $(t_1, (t_2^2 + 1))$. Cette fois-ci y correspond à (t), dont le corps résiduel est $\mathbf{R}$.

3. On prend $f : \operatorname{Spec} \mathbf{Q} \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ associé à l'inclusion $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$. L'unique point de $\operatorname{Spec} \mathbf{Q}$ est alors envoyé sur l'idéal nul de $\mathbf{Z}$, correspondant au point générique de $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$, lequel n'est pas fermé.

4. Notons déjà que la dite application u est bien définie via **1.** et le corollaire 2.28. Soient x un point fermé de X, de corps résiduel $k(x)$, et y un point fermé de Y, de corps résiduel $k(y)$. Choisissons une extension finie L de k contenant les deux extensions finies $k(x)$ et $k(y)$. En composant les k-morphismes $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec}(k(x))$ et $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec}(k(y))$ respectivement avec des morphismes $\operatorname{Spec}(k(x)) \to X$ et $\operatorname{Spec}(k(y)) \to Y$ d'image x et y (cf. section 2.1., remarque c), on obtient des k-morphismes $f : \operatorname{Spec} L \to X$ et $g : \operatorname{Spec} L \to Y$ d'images respectives x et y. Par définition du produit fibré, f et g induisent un unique k-morphisme $(f, g) : \operatorname{Spec} L \to X \times_k Y$ dont l'image est un point m qui s'envoie sur (x, y) par u.

Partie II.

1. a) Si x' est un point de X' de même corps résiduel que $y' := f'(x')$, alors $x := \alpha(x')$ a même corps résiduel que $y := f(x)$ vu que $k(x)$ et $k(y)$ sont des extensions intermédiaires entre $k(y')$ et $k(x')$.

b) Si on compose l'immersion fermée $\alpha : X_{\text{red}} \to X$ avec f, alors $f' : X_{\text{red}} \to Y$ vérifie encore les hypothèses (l'image ensembliste de X_{red} dans Y

est encore $f(X)$, donc a même dimension; de plus X_{red} est encore de type fini sur k), donc d'après a) il suffit de montrer (*) pour f'.

c) Soient $X_1, ..., X_r$ les composantes irréductibles de X (muni de leur structure réduite). Alors $\overline{f(X)}$ est la réunion des fermés $\overline{f(X_i)}$, donc l'une des $\overline{f(X_i)}$ est de dimension ≥ 1 (sinon, toutes les composantes irréductibles de chaque $\overline{f(X_i)}$ seraient de dimension 0, donc leur réunion aussi d'après la Prop. 4.7.c). On remplace alors X par le sous-schéma fermé intègre X_i correspondant.

2. D'après la Prop. 4.7.d), il existe un ouvert affine V de Y tel que $\dim(\overline{f(X)} \cap V) \geq 1$. Soit U un ouvert affine non vide de $f^{-1}(V)$, alors U est dense dans X (qui est intègre), donc $\overline{f(U)} = \overline{f(X)}$ et il suffit alors de remplacer f par sa restriction $U \to V$.

3. a) Il suffit de remplacer A par $A_0 = \varphi(A)$. Alors le morphisme f : $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ s'écrit $f = i \circ f_0$, où i est l'immersion fermée $\operatorname{Spec} A_0 \operatorname{Spec} A$ et $f_0 : X = \operatorname{Spec} B \to X_0 := \operatorname{Spec} A_0$. Alors $\overline{f_0(X_0)}$ s'identifie à $\overline{f(X)}$ (donc reste de dimension ≥ 1), et le corps résiduel d'un point fermé x_0 de $X_0 \hookrightarrow Y$ est le même dans X_0 et dans Y.

b) Comme $Y = \operatorname{Spec} A$ est de type fini sur k et de dimension ≥ 1, il existe (par exemple d'après le lemme de normalisation de Noether et ses conséquences sur la dimension) un morphisme injectif $k[t] \to A$. Comme alors $k[t] \to B$ reste injectif, il suffit d'appliquer 2)a) à $\alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$, $f : X \to Y$ et $\beta : Y \to \mathbf{A_k}^1$.

c) Par définition du localisé, tout élément non nul de A est inversible dans $S^{-1}B$, donc n'est pas dans I, d'où l'injectivité voulue. Via 2)a), on peut alors supposer $B = B'$. Comme L est alors le corps des fractions de B (c'est un corps qui contient B et réciproquement tout élément de L s'écrit comme quotient de deux éléments de B), et que c'est une $k(t)$-algèbre de type fini ($S^{-1}B$ l'est par définition de S, vu que B est de type fini sur k), c'est une extension finie de $k(t)$ (par exemple via le lemme de normalisation de Noether). Il suffit alors d'appliquer le résultat admis.

Pour une preuve du résultat admis (et un contre-exemple si le corps de base n'est pas parfait), on pourra se reporter à l'article de B. Poonen *Points having the same residue field as their image under a morphism*, J. Algebra **243** (2001), no. 1, 224-227.