Partiel du cours de M2 "Géométrie algébrique"

Université d'Orsay (D. Harari)

5 décembre 2007; durée : 2h; notes de cours autorisées.

Par convention, tous les anneaux, corps, et algèbres considérés sont supposés commutatifs. Dans les exercices 2 et 3, on peut admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies, et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on dira d'abord si l'assertion est vraie ou fausse) :

1. Soit k un corps. Soient X et Y deux k-schémas intègres et de type fini. Alors le schéma $X \times_k Y$ est intègre.

2. Soit X un schéma intègre. Alors pour tout ouvert non vide U de X, l'homomorphisme de restriction $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U)$ est injectif.

3. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini. Si pour tout y de Y, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est fini, alors f est un morphisme fini.

4. Soient k un corps et $n \geq 1$ un entier. Soit I un idéal homogène de l'anneau gradué $k[T_0, ..., T_n]$. Alors le schéma $\operatorname{Proj}(k[T_0, ..., T_n]/I)$ n'est jamais affine.

Exercice 2 : Schémas de Jacobson

Si I est un idéal d'un anneau, on note $\sqrt{I}$ son radical.

1. Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine. Soit $Z = V(I)$ un fermé de X, où I est un idéal de A avec $\sqrt{I} = I$. On note Z_0 l'ensemble des points fermés de Z et $\overline{Z_0}$ l'adhérence de Z_0.

a) Soit J l'intersection des idéaux maximaux de A qui contiennent I. Montrer que $\sqrt{J} = J$.

b) Montrer que $\overline{Z_0} = V(J)$.

c) En déduire que $\overline{Z_0} = Z$ si et seulement s'il existe une famille $(\mathcal{M}_r)$ d'idéaux maximaux de A telle que

$$I = \bigcap_r \mathcal{M}_r$$

2. On dit qu'un anneau A est un *anneau de Jacobson* si tout idéal premier de A peut s'écrire comme une intersection d'idéaux maximaux. On dit qu'un schéma X est de Jacobson si pour tout fermé Z de X, on a $\overline{Z_0} = Z$, où Z_0 désigne l'ensemble des points fermés de Z. Montrer que $\operatorname{Spec} A$ est de Jacobson si et seulement si A est un anneau de Jacobson.

3. Soit X un schéma de type fini sur un corps k. Montrer que X est de Jacobson.

Exercice 3 : Morphismes et fonctorialités.

Si X et T sont des schémas, on note $X(T)$ l'ensemble des morphismes de schémas de T dans X. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas et T est un schéma, on note $f_T : X(T) \to Y(T)$ l'application définie par $f_T(g) = f \circ g$ pour tout morphisme $g : T \to X$.

1. Montrer que si f est un isomorphisme, alors f_T est une bijection.

2. Montrer la réciproque : si f_T est bijective pour tout schéma T, alors f est un isomorphisme (on pourra utiliser les morphismes id_X et id_Y).

3. On fait l'hypothèse[1] que l'intersection de deux ouverts affines de X est affine, et de même pour Y. On suppose que pour tout schéma *affine* T, l'application f_T est bijective. Montrer que f est un isomorphisme.

4. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille infinie d'anneaux non nuls. On pose $X_i = \operatorname{Spec} A_i$ et on note X le schéma union disjointe des X_i (on peut donc voir chaque X_i comme un ouvert de X). On pose également $A = \prod_{i \in I} A_i$ et $Y = \operatorname{Spec} A$.

a) Montrer qu'il existe un unique morphisme de schémas $u : X \to Y$ dont la restriction à chaque X_i est induit par la projection $A \to A_i$.

b) Montrer que u n'est pas un isomorphisme.

c) (Question subsidiaire !) Montrer que pour tout schéma affine $T = \operatorname{Spec} B$, l'application qui à un morphisme $g : Y \to T$ associe le morphisme $g \circ u : X \to T$ est bijective.

Barême probable. Exercice 1 : 6 points. Exercice 2 : 7 points. Exercice 3 (sans la question subsidiaire) : 7 points. Question subsidiaire : 2 points.

[1] Ceci est vérifié par exemple si X et Y sont séparés.