Partiel du cours de M2 "Géométrie algébrique"

David Harari

13 décembre 2006; durée : 2h; notes de cours autorisées.

Par convention, tous les anneaux, corps, et algèbres considérés sont supposés commutatifs.

Exercice 1 : Vrai ou faux ? (6 points)

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies, et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on dira d'abord si l'assertion est vraie ou fausse) :

1. Soit X un schéma propre et de type fini sur un corps k. Alors l'anneau $\mathcal{O}_X(X)$ est isomorphe à k.

2. Soit X une variété algébrique non vide sur un corps algébriquement clos k. Alors l'ensemble $X(k) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Spec}\, k}(\mathrm{Spec}\, k, X)$ des k-points de X est non vide.

3. Soient X et Y des schémas affines intègres. Soit Z une partie dense de X. Soient f et g des morphismes de X vers Y; on suppose que pour tout point z de Z, on a $f(z) = g(z)$. Alors les morphismes f et g sont égaux.

4. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas et U un ouvert de Y. Si $f(X) \subset U$, alors il existe un morphisme de schémas $g : X \to U$ tel que $f = i \circ g$, où $i : U \to Y$ est l'immersion ouverte correspondant à U.

Exercice 2 : Variétés "retract-rationnelles" (14 points)

Il est permis d'admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

1. Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M}$. Soit x le point fermé de $\mathrm{Spec}\, A$ (correspondant à $\mathcal{M}$). Montrer que si y est un point de $\mathrm{Spec}\, A$, alors x appartient à l'adhérence $\overline{\{y\}}$ de y.

2. Soit k un corps et A une k-algèbre locale[1] dont on note $\mathcal{M}$ l'idéal maximal et L le corps résiduel. Pour tout k-schéma X, on note

$$\varphi_{X,A} : X(A) \to X(L)$$

l'application de "réduction modulo $\mathcal{M}$". [2]

a) Montrer que si X est l'espace affine $\mathbf{A}_k^n$, on a $X(A) = A^n$.

b) Soient X un k-schéma et U un ouvert non vide de X. Montrer que si $\varphi_{X,A}$ est surjective, alors $\varphi_{U,A}$ est surjective (on pourra utiliser **1.**).

c) Soit U une k-variété intègre. On suppose que la condition suivante est vérifiée :

(*) Il existe un entier n, un ouvert non vide Y de l'espace affine $\mathbf{A}_k^n$, et des k-morphismes $f : U \to Y$ et $g : Y \to U$ tels que $g \circ f$ soit le morphisme identité id_U de U.

Montrer qu'alors $\varphi_{U,A}$ est surjective.

On dira qu'une k-variété intègre X est *retract-rationnelle* (notion due à D. Saltman) s'il existe un ouvert non vide U de X satisfaisant (*).

3. Soit X une k-variété intègre. On suppose qu'il existe un ouvert non vide V de X tel que pour toute k-algèbre locale A, l'application $\varphi_{V,A}$: $V(A) \to V(L)$ (où L est le corps résiduel de A) soit surjective. On se propose de montrer que X est retract-rationnelle.

a) Montrer qu'on peut supposer pour cela que $V = X$, et que $X = \operatorname{Spec} B$, où B s'écrit $B = k[T_1, ..., T_n]/\wp$ avec $\wp$ idéal premier de l'anneau de polynômes $k[T_1, ..., T_n]$.

b) On pose $R = k[T_1, ..., T_n]$ et $A = R_\wp$; on note $L = \operatorname{Frac} B$ le corps des fonctions de X, qui est aussi le corps résiduel de A. Montrer qu'il existe un ouvert affine non vide W de $\mathbf{A}_k^n$ et des k-morphismes $g : \operatorname{Spec} L \to W$ et $h : W \to X$ dont le composé $h \circ g : \operatorname{Spec} L \to X$ est le morphisme canonique (associé à l'inclusion $B \to L$).

c) En déduire qu'il existe un ouvert non vide U de X et un k-morphisme $f : U \to W$ tels que $h \circ f$ soit l'immersion ouverte $U \to X$.

d) Conclure.

[1] c'est-à-dire que A est local quand on le considère juste comme un anneau.

[2] Plus précisément, si $u \in X(A) = \mathrm{Mor}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} A, X)$ est un A-point, son image par $\varphi_{X,A}$ est le L-point de X défini par le k-morphisme $u \circ \pi : \operatorname{Spec} L \to X$, où $\pi : \operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} A$ est le k-morphisme induit par la surjection canonique $A \to L$.