Examen du cours "Géométrie algébrique"

M2-Université d'Orsay (D. Harari)

30 janvier 2009; durée : 3h; notes de cours autorisées.

Par convention, tous les anneaux, corps, et algèbres considérés sont supposés commutatifs. Dans chaque exercice, on peut admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Exercice 1. (4 points)

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. a) Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine. Montrer que si x et y sont des points de X avec $x \neq y$, alors il existe un ouvert U de X tel que U contienne l'un des deux points x, y et pas l'autre (autrement dit : le cardinal de $U \cap \{x, y\}$ est 1).

b) Le résultat de a) est-il encore vrai pour un schéma X quelconque ?

2. Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine. Montrer que si X est connexe, alors les seuls éléments a de A qui vérifient $a^2 = a$ sont $a = 0$ et $a = 1$.

Exercice 2. (5 points)

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on dira d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Si X et Y sont des schémas noethériens et réguliers, alors tout morphisme surjectif $X \to Y$ est lisse.

b) Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif. Si X est régulier, alors Y est normal.

c) Soient X et Y des variétés sur un corps algébriquement clos k. Si X et Y sont des schémas réguliers, alors $X \times_k Y$ est régulier.

Exercice 3. (9 points)

Soit X un schéma intègre et noethérien de corps des fonctions K. On note $\mathcal{K}$ le faisceau constant égal à K sur X.

1. a) Montrer que l'$\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{K}$ est un faisceau quasi-cohérent. Est-il cohérent ?

b) Montrer que $\mathcal{O}_X$ est un sous-faisceau de $\mathcal{K}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on note $\mathcal{F}$ le faisceau quotient $\mathcal{K}/\mathcal{O}_X$.

2. Montrer que si $U = \operatorname{Spec} A$ est un ouvert affine de X, alors la restriction de $\mathcal{F}$ à U est isomorphe (comme $\mathcal{O}_U$-module) à $(\widetilde{K/A})$, où K/A est vu comme un A-module.

3. On suppose de plus dans cette question que X est de dimension 1.

a) Montrer que si Ω est un ouvert non vide de X alors le complémentaire $X - \Omega$ est un ensemble fini.

b) Soit U un ouvert de X et soit $s \in \mathcal{F}(U)$. Montrer qu'il existe un sous-ensemble fini F de U tel que pour tout x de $U - F$, on ait $s_x = 0$, où s_x est la restriction de s à la tige $\mathcal{F}_x$ (on pourra commencer par le cas où U est affine).

c) En déduire qu'on a une suite exacte de faisceaux sur X :

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{K} \to \bigoplus_{x \in X} Q_x \to 0$$

où Q_x est le faisceau défini par $Q_x(U) = K/\mathcal{O}_{X,x}$ si U est un ouvert qui contient x et $Q_x(U) = 0$ si U est un ouvert qui ne contient pas x.

4. Soient k un corps et $X = \mathbf{P}^1_k$ la droite projective sur k. Soient $x_1, ..., x_n$ des points deux à deux distincts de X et $f_1, ..., f_n$ des éléments du corps des fonctions K de X. Montrer qu'il existe $f \in K$ tel que pour tout i de $\{1, ..., n\}$, on ait $f - f_i \in \mathcal{O}_{X,x_i}$.

Exercice 4. (4 points)

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas noethériens. On suppose X et Y séparés. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X.

1. Montrer que si f est un morphisme affine, alors les groupes de cohomologie $H^p(Y, f_*\mathcal{F})$ et $H^p(X, \mathcal{F})$ sont isomorphes pour tout $p \geq 0$ (on pourra utiliser la cohomologie de Čech).

2. On suppose que Y n'est pas affine et que X est affine. Montrer qu'il existe un faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur Y tel que les groupes $H^1(Y, \mathcal{G})$ et $H^1(X, f^*\mathcal{G})$ ne soient pas isomorphes.

3. Montrer que le résultat de la question 1. ne vaut plus forcément si f est une immersion ouverte.