Examen de Géométrie algébrique (M2)

Université Paris-Sud (D. Harari)

10 février 2010; durée : 3h; notes de cours autorisées.

Par convention, tous les anneaux, corps, et algèbres considérés sont supposés commutatifs. On peut admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Le symbole (*) signale une question que l'auteur a trouvée plus difficile.

Exercice 1 : Morphismes entre courbes (7 points).

Soit k un corps. Soient X et Y des k-schémas intègres, de type fini, et de dimension 1. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de k-schémas qui n'est pas constant (c'est-à-dire que $f(X)$ n'est pas réduit à un point). Soit $x \in X$ et soit $y = f(x)$.

1. On suppose de plus que Y est normal.

a) Montrer que la fibre X_y de f en y est de dimension 0.

b) Soit $k(y)$ le corps résiduel de y. Montrer que le morphisme $X_y \to \operatorname{Spec}(k(y))$ (induit par f) est fini.

2. On ne suppose plus Y normal. Soient $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ les normalisations respectives de X et Y (on rappelle que les morphismes associés $p : \widetilde{X} \to X$ et $q : \widetilde{Y} \to Y$ sont finis et surjectifs).

(*) a) Montrer que la fibre $\widetilde{X}_y$ de $f \circ p : \widetilde{X} \to Y$ en y est de dimension 0.

b) Montrer que $\widetilde{X}_y = \widetilde{X} \times_X X_y$.

(*) c) Les résultats de 1.a) et 1.b) restent-ils vrais ?

Exercice 2 : Un exemple de schéma régulier (5 points).

Soit k un corps. Soit n un entier strictement positif. On note R l'anneau de polynômes (en n^2 variables) $R = k[X_{11}, ..., X_{nn}]$. On définit un polynôme $P \in R$ par la formule $P(X_{11}, ..., X_{nn}) = \det([X_{ij}])$, où $[X_{ij}]$ désigne la matrice à coefficients dans R dont le coefficient d'indice (i, j) est X_{ij}.

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout $\lambda \in k$, le polynôme $P - \lambda$ est irréductible sur k.

Soit Y le sous-schéma fermé de l'espace affine $\mathbf{A}_k^{n^2}$ défini par l'équation $P(X_{11}, ..., X_{nn}) = 1$, autrement dit $Y = \operatorname{Spec}(R/(P-1))$.

1. Montrer que Y est un schéma régulier (on pourra par exemple utiliser le développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne).

(*) **2.** Montrer que Y possède un ouvert dense U tel que le k-schéma U soit isomorphe à un ouvert de l'espace affine $\mathbf{A}_k^{n^2-1}$ (on pourra observer que le polynôme P s'écrit $P = X_{11}Q + V$, où Q et V sont des polynômes ne contenant pas X_{11} dans leur écriture).

Exercice 3 : Morphismes birationnels et $\mathcal{O}_X$-modules (4 points).

Soient X et Y des schémas intègres et noethériens de corps des fonctions respectifs $K(X)$ et $K(Y)$. On suppose que Y est normal. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et surjectif. On fait l'hypothèse que f est *birationnel*, c'est-à dire que l'homomorphisme de corps $K(Y) \to K(X)$ induit par f est un isomorphisme.

1. On suppose dans cette question 1. que $Y = \operatorname{Spec} A$ est affine et on note B la A-algèbre $\Gamma(Y, f_*\mathcal{O}_X)$.

a) Montrer que A et B ont même corps de fractions.

b) En déduire que $A = B$.

2. Montrer que $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$.

Exercice 4 : Cohomologie des faisceaux cohérents et localement libres (5 points).

1. Soit X un schéma noethérien et séparé. Montrer qu'il existe un entier $N > 0$ tel que pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur X et tout entier $i > N$, on ait $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.

2. Soit X un schéma projectif sur un anneau noethérien A.

a) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Montrer qu'il existe un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de type fini $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{F}$ soit isomorphe à un quotient de $\mathcal{G}$.

(*) b) Soit $d \in \mathbf{N}$. On suppose que pour tout $\mathcal{O}_X$-module localement libre de type fini $\mathcal{G}$ et tout entier $i > d$, on a $H^i(X, \mathcal{G}) = 0$. Montrer que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X et pour tout entier $i > d$, on a $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.