Examen du cours de M2 "Géométrie algébrique"

Université d'Orsay (D. Harari)

1 février 2008; durée : 3h; notes de cours autorisées.

Dans chaque exercice, on peut admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Exercice 1 (4 points)

1. Donner un exemple de morphisme fini $f : X \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ qui est plat mais n'est pas lisse.

2. Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini et plat entre schémas noethériens. Montrer que $f_* \mathcal{O}_X$ est un faisceau localement libre sur Y.

3. Soit $f : X \to Y$ une immersion fermée entre schémas noethériens. Montrer que si f est un morphisme plat, alors f est également une immersion ouverte (on admettra qu'un morphisme plat est une application ouverte).

Exercice 2 (4 points)

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre entre schémas..

1. Montrer que si Y et toutes les fibres X_y de f sont non vides et connexes, alors X est connexe.

2. La conclusion de **1.** reste-elle valable en remplaçant partout "connexe" par "intègre" ?

Exercice 3 (6 points)

Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine avec A noethérien.

1. Tout A-module M est-il réunion de ses sous-modules de type fini ?

2. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Montrer qu'il existe une famille (éventuellement infinie) $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de sous-faisceaux de $\mathcal{F}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

i) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, le faisceau $\mathcal{F}_\lambda$ est cohérent.

ii) Pour toute famille finie $J \subset \Lambda$, il existe $\beta \in \Lambda$ tel que $\mathcal{F}_\lambda$ soit un sous-faisceau de $\mathcal{F}_\beta$ pour tout $\lambda \in J$.

iii) Pour tout ouvert affine principal $V = D(g)$ de X, on a

$$\mathcal{F}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda(V)$$

3. Soient U un ouvert non vide de X et $f : U \to X$ l'immersion ouverte associée. On considère un faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur U et un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de U par un nombre fini d'ouverts affines principaux de X.

a) Montrer qu'il existe un sous-faisceau cohérent $\mathcal{R}$ de $f_*\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{R}(U_i) = \mathcal{G}(U_i)$ pour tout $i \in I$ (on pourra utiliser **2.**).

b) En déduire que la restriction de $\mathcal{R}$ à U est un $\mathcal{O}_U$-module isomorphe à $\mathcal{G}$.

Exercice 4 (6 points)

1. Soit X un espace topologique. On considère un fermé Z de X et un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur X. On note $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ le sous-groupe de $\Gamma(X, \mathcal{F})$ constitué des sections globales s *à support dans* Z, c'est-à-dire telles que la fibre s_x soit nulle pour tout $x \notin Z$.

Montrer que si V est un ouvert de X contenant Z, alors la restriction $\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) \to \Gamma_Z(V, \mathcal{F})$ est un isomorphisme (on pourra écrire X comme réunion de V et de $X - Z$).

2. On suppose maintenant que X est un schéma affine noethérien et que Z est un fermé de X tel que l'ouvert $U = X - Z$ soit affine. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X, on considère une résolution injective

$$0 \to \mathcal{F} \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to ...$$

de $\mathcal{F}$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules.

a) Montrer que les suites

$$\Gamma(X, I^0) \to \Gamma(X, I^1) \to \Gamma(X, I^2) \to ...$$

et

$$\Gamma(U, I^0) \to \Gamma(U, I^1) \to \Gamma(U, I^2) \to ...$$

sont exactes.

b) Montrer que pour tout $j \geq 0$, la restriction $\Gamma(X, I^j) \to \Gamma(U, I^j)$ est surjective.

c) On note $H^i_Z(X, .)$ ($i \geq 0$) les foncteurs dérivés du foncteur $\Gamma_Z(X, .)$ (dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules[1]). Montrer que si $i \geq 2$, alors on a $H^i_Z(X, \mathcal{F}) = 0$ (on pourra utiliser une chasse au diagramme).

3. Soient X un schéma affine noethérien et Z un fermé de X tel qu'il existe un ouvert affine $V \supset Z$ avec $V - Z$ affine. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Montrer que $H^i_Z(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i \geq 2$.

[1] Le même argument que dans le cours montre qu'on obtient la même chose en travaillant dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens.