Examen du cours de M2 "Géométrie algébrique" (D. Harari).
31 janvier 2007; durée : 3h; notes de cours autorisées.

Par convention, tous les anneaux et corps considérés sont commutatifs. Dans chaque exercice, les candidats sont autorisés à admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Exercice 1 (10 points).

On dira qu'un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est *constant* si on a $f(x) = f(y)$ pour tous points x, y de X. On admettra (c'est une conséquence du théorème des zéros de Hilbert) que si X et Y sont des variétés sur un corps algébriquement clos k avec X réduite, alors deux k-morphismes f et g de X dans Y sont égaux s'ils vérifient $f(x) = g(x)$ pour tout k-point x de X.

1. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas avec X intègre. On suppose que pour tout ouvert affine U de X, le morphisme $f_{|U} : U \to Y$ (obtenu par restriction de f à U) est constant. Montrer que f est constant.

2. Soient $Y = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine et $f : X \to Y$ un morphisme de schémas avec X intègre. Montrer que pour tout ouvert affine $U = \operatorname{Spec} B$ de X, l'homomorphisme $A \to B$ induit par la restriction $f_{|U} : U \to Y$ est à valeurs dans le sous-anneau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ de B.

3. Soit X un schéma projectif et géométriquement intègre sur un corps k. Soit Y un schéma affine. Montrer que tout morphisme $f : X \to Y$ est constant.

4. Soient X, Y, Z des variétés sur un corps algébriquement clos k. On note $p_1 : X \times_k Y \to X$ la première projection et $p_2 : X \times_k Y \to Y$ la deuxième projection. On suppose X et Y intègres et X projectif sur k. Pour tout k-point y de Y, on note φ_y le k-morphisme $x \mapsto (x, y)$ de X dans $X \times_k Y$, c'est-à-dire que $p_1 \circ \varphi_y : X \to X$ est l'identité et $p_2 \circ \varphi_y : X \to Y$ est le morphisme constant d'image y.

Soit $f : X \times_k Y \to Z$ un k-morphisme vérifiant : il existe $y_0 \in Y(k)$ tel que le morphisme $f \circ \varphi_{y_0} : X \to Z$ soit constant, d'image un k-point z_0 de Z.

a) Soit V un ouvert affine de Z contenant z_0. On pose $F = Z - V$. Montrer que $p_2(f^{-1}(F))$ est un fermé de Y distinct de Y.

b) En déduire qu'il existe un ouvert non vide U de Y tel que pour tout y de $U(k)$, le morphisme $f \circ \varphi_y : X \to Z$ soit à valeurs dans V; montrer alors que $f \circ \varphi_y$ est constant.

c) Soit $x_0 \in X(k)$. On note ψ_0 le morphisme $y \mapsto (x_0, y)$ de Y dans $X \times_k Y$. Montrer que les morphismes $f \circ \psi_0 \circ p_2$ et f coïncident sur $X \times_k U$.

d) En déduire qu'il existe un k-morphisme $g : Y \to Z$ tel que $f = g \circ p_2$ ("lemme de rigidité").

Exercice 2 (5 points).

Soit X un schéma projectif et géométriquement intègre sur un corps k. Soit K le corps des fonctions de X.

1. Soit D un diviseur de Cartier sur X. On suppose qu'il existe deux diviseurs de Cartier effectifs D_1, D_2 sur X tels que $D \simeq D_1$ et $-D \simeq D_2$.

a) Montrer qu'on peut écrire $D = (U_i, f_i)$ où (U_i) est un recouvrement ouvert de X et $f_i \in K^*$, avec la condition : il existe $u, v \in K^*$ tels que chaque f_i vérifie : $f_i.u \in \mathcal{O}_X(U_i)$ et $f_i^{-1}v \in \mathcal{O}_X(U_i)$.

b) Montrer que uv est un élément constant $\lambda \in k^*$. En déduire que $D \simeq 0$.

2. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. Montrer que si $H^0(X, \mathcal{L})$ et $H^0(X, \mathcal{L}^{-1})$ sont tous deux non nuls, alors $\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X$.

3. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$. On note π la projection $\overline{X} \to X$. L'image inverse $\mathcal{L} \to \pi^*\mathcal{L}$ définit un homomorphisme $\theta : \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} \overline{X}$. Montrer que θ est injectif.

Exercice 3 (5 points).

Soit A un anneau. On rappelle que si $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$ est une suite exacte de A-modules avec M'' plat, alors M est plat si et seulement si M' est plat. Dans toute la suite, on considère un anneau noethérien A et un $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$ sur $X = \mathbf{P}^n_A = \operatorname{Proj}(A[T_0, ..., T_n])$. On fait l'hypothèse que pour tout ouvert affine U de X, le A-module $\Gamma(U, \mathcal{F})$ est plat.

1. Soit $\mathcal{U}$ le recouvrement ouvert de X donné par les ouverts standard $D_+(T_0)$,...,$D_+(T_n)$. On pose $U_{i_0,...,i_p} = D_+(i_0) \cap ... \cap D_+(i_p)$. Montrer que pour tout $p \geq 0$ et tout $m \in \mathbf{Z}$, le A-module $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) = \prod_{i_0<...<i_p} \mathcal{F}(m)(U_{i_0,...,i_p})$ est plat.

2. Montrer qu'il existe $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $m \geq m_0$, la suite

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}(m)) \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \to ... \to C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \to 0$$

soit exacte.

3. En déduire que si A est de plus supposé local, alors $H^0(X, \mathcal{F}(m))$ est un A-module libre de type fini pour $m \geq m_0$.

4. On suppose toujours A local. Soit $B = A[T_0, ..., T_n]$. Montrer qu'il existe un B-module gradué M qui est libre comme A-module, et tel que $\mathcal{F}$ soit isomorphe au faisceau $\widetilde{M}$ sur X.