Partiel du cours de M2 "Géométrie algébrique"

Université d'Orsay (D. Harari)

2 décembre 2009; durée : 2h; notes de cours autorisées.

Par convention, tous les anneaux, corps, et algèbres considérés sont supposés commutatifs. On peut admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Exercice 1 : Points fermés d'un schéma (8 points).

Soit X un schéma non vide.

1. Soit F un fermé irréductible minimal de X (c'est-à-dire que si F' est un fermé irréductible de X avec $F' \subset F$, alors $F' = F$).

a) Soit x un point de F. Quelle est l'adhérence $\overline{\{x\}}$ du point x ?

b) Montrer que F est réduit à un point.

2. Soit G un fermé de X contenant un point fermé x de X. On suppose que G contient un point y tel que $\overline{\{y\}} = G$.

a) Soit $U = \operatorname{Spec} A$ un ouvert affine de X contenant x. Montrer que le fermé $U \cap G$ de U est le fermé $V(\wp)$ de $\operatorname{Spec} A$, où $\wp$ est l'idéal premier de A correspondant à y.

b) En déduire que $\mathcal{O}_{X,y}$ est un localisé de $\mathcal{O}_{X,x}$.

3. On suppose que X est un schéma noethérien.

a) Montrer que X contient un point fermé x.

b) On suppose que pour tout point fermé x de X, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit. Le schéma X est-il réduit ?

Exercice 2 : Produits fibrés (6 points).

Soit S un schéma. Soient X et Y des S-schémas dont on note respectivement $f : X \to S$ et $g : Y \to S$ les morphismes structuraux.

1. On suppose que le produit fibré $X \times_S Y$ est non vide. Montrer qu'il existe $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $f(x) = g(y)$.

2. On suppose réciproquement qu'il existe $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $f(x) = g(y)$ et on pose $s = f(x) = g(y)$.

a) Montrer qu'on peut trouver un corps K tel qu'il existe des morphismes $f_1 : \operatorname{Spec} K \to X$ et $g_1 : \operatorname{Spec} K \to Y$ vérifiant : $f \circ f_1 = g \circ g_1$.

b) En déduire que $X \times_S Y$ est non vide.

Exercice 3 : k-algèbres de type fini (6 points).

Soit k un corps algébriquement clos.

1. Soit B une k-algèbre avec $B \neq 0$. Soient b un élément non nilpotent de B et $\rho : B \to B_b$ l'homomorphisme de localisation.

a) Montrer qu'il existe un idéal maximal I du localisé B_b.

b) On suppose que B est une algèbre de type fini sur k. Montrer que $\rho^{-1}(I)$ est un idéal maximal de B. Peut-il contenir b ?

2. Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, réduit et de type fini sur k. Soit $f : X \to \mathbf{A}_k^n$ un k-morphisme. On note $\varphi : k[T_1, ..., T_n] \to A$ l'homomorphisme de k-algèbres correspondant à f. On pose $f_i = \varphi(T_i)$ pour $i = 1, ..., n$ et on identifie l'ensemble $\mathbf{A}_k^n(k)$ des k-points de l'espace affine $\mathbf{A}_k^n$ à k^n.

a) Montrer que pour tout k-point x de X, on a $f(x) = (f_1(x), ...f_n(x))$, où $f(x)$ est vu dans $\mathbf{A}_k^n(k) = k^n$ et $f_i(x)$ est l'évaluation de $f_i \in A = \mathcal{O}_X(X)$ en x.

b) Montrer que si un élément ψ de A vérifie $\psi(x) = 0$ pour tout k-point x de X, alors $\psi = 0$.