Partiel du cours de M2 "Géométrie algébrique"

Université d'Orsay (D. Harari)

3 décembre 2008; durée : 2h; notes de cours autorisées.

Par convention, tous les anneaux, corps, et algèbres considérés sont supposés commutatifs. Dans chaque exercice, on peut admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Exercice 1 : Ouverts principaux et non principaux (7 points).

On rappelle que si R est un anneau de Dedekind, alors tout idéal non nul I de R s'écrit de manière unique (à permutation près des facteurs) sous la forme $I = \wp_1^{\alpha_1} ... \wp_r^{\alpha_r}$, où les $\wp_i$ sont des idéaux premiers de R et $\alpha_i \in \mathbf{N}^*$.

Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine et $\wp$ un point fermé de X.

1. On suppose qu'il existe $n > 0$ tel que l'idéal $\wp^n$ soit égal à fA pour un certain $f \in A$. Montrer que $X - \{\wp\}$ est l'ouvert principal $D(f)$.

2. On suppose que A est un anneau de Dedekind. Montrer que si $X - \{\wp\}$ est un ouvert principal de X, alors il existe $n > 0$ et $f \in A$ tel que $\wp^n = fA$.

3. Dans cette question, on suppose que A est une algèbre intègre de type fini sur un corps k, avec A de dimension ≥ 2 et telle que

$$A = \bigcap_{Q \in \operatorname{Spec} A, \operatorname{ht} Q = 1} A_Q$$

(cette condition est par exemple vérifiée si A est un anneau normal). Montrer que l'ouvert $X - \{\wp\}$ ne peut pas être affine.

4. Soit A un anneau de valuation de corps des fractions K. On suppose que la valuation v est à valeurs dans $\mathbf{Q}$ et que $v : K^* \to \mathbf{Q}$ est surjective.[1] Soit $\mathcal{M}$ l'idéal maximal de A (constitué des éléments x de K tels que $v(x) > 0$). Montrer que $X - \{\mathcal{M}\}$ est un ouvert principal de X mais qu'il n'existe pas de $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathcal{M}^n$ soit un idéal principal (c'est-à-dire engendré par l'un de ses éléments).

[1] C'est par exemple le cas si A est l'anneau des entiers de $\overline{\mathbf{Q}_p}$ avec p premier.

Exercice 2 : Dimension et produit (8 points).

On rappelle que si R est un anneau, B et C sont des R-algèbres, et S est une partie multiplicative de B, alors on a $(B_S \otimes_R C) = (B \otimes_R C)_{S'}$, où S' est l'image de S dans $(B \otimes_R C)$ ("le produit tensoriel commute à la localisation").

Soit k un corps. On considère deux k-schémas X et Y, de dimension respectives r et s finies.

1. On suppose X affine et de type fini sur k.

a) Montrer qu'il existe un morphisme fini et surjectif $f : X \to \mathbf{A}_k^r$.

b) On suppose de plus que Y est affine et noethérien. Montrer que $X \times_k Y$ est de dimension $r+s$.

2. Montrer qu'on a encore $\dim(X \times_k Y) = r+s$ si on suppose seulement que X est un schéma de type fini sur k et Y est un schéma noethérien.

3. Soit $X = \operatorname{Spec}(k(T))$.

a) Soit L une extension de corps de k. Montrer que $X \times_k L$ est isomorphe à $\operatorname{Spec} A$, où A est le localisé de $L[T]$ par rapport à une partie multiplicative S que l'on précisera.

b) Soit $Y = X = \operatorname{Spec}(k(T))$. Montrer que la formule $\dim(X \times_k Y) = \dim X + \dim Y$ ne vaut plus ici.

Exercice 3 : Exemples (5 points).

On justifiera soigneusement les réponses.

1. Donner un exemple de schéma localement noethérien qui n'est pas noethérien.

2. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini entre schémas. Pour $y \in Y$, on note $k(y)$ le corps résiduel de y et $X_y = X \times_Y \operatorname{Spec}(k(y))$ la fibre de f en y. Donner un exemple où pour tout y de Y, le morphisme $X_y \to \operatorname{Spec}(k(y))$ induit par f est fini, mais le morphisme f n'est pas fini.

3. Donner un exemple de variété intègre X sur $\mathbf{R}$ telle que le corps des fonctions de X contienne $\mathbf{C}$, mais le morphisme structural $X \to \operatorname{Spec}\mathbf{R}$ ne se factorise pas par le morphisme canonique $\operatorname{Spec}\mathbf{C} \to \operatorname{Spec}\mathbf{R}$.