Corrigé de l'examen du 30 janvier 2009

M2-Université d'Orsay (D. Harari)

Exercice 1.

1. a) Les points x et y correspondent à des idéaux premiers $\wp$ et $\wp'$ de A. Comme ils sont distincts, on a par exemple $\wp \not\subset \wp'$. Il existe donc $f \in A$ avec $f \in \wp$ et $f \notin \wp'$. Alors l'ouvert $D(f)$ contient y et pas x.

b) Oui : prenons un ouvert affine $U = \operatorname{Spec} A$ contenant x. S'il ne contient pas y, c'est terminé. Sinon il contient x et y et on applique a).

2. Si $a^2 = a$, alors les fermés $V(aA)$ et $V((a-1)A)$ de $\operatorname{Spec} A$ recouvrent X car si $\wp$ est un idéal premier de A, alors il contient $a(a-1)$, donc a ou $a-1$. D'autre part l'intersection de ces deux fermés est vide car si a et $a-1$ sont dans un idéal $\wp$, alors $1 = a - (a-1)$ y est aussi.

Si X est connexe, l'un des deux fermés est vide, ce qui signifie que a ou $a-1$ est inversible, ce qui implique que $a-1$ ou a est nul vu que $a(a-1) = 0$.

Remarque : La réciproque de la question 2. est vraie (c'est juste un peu plus long à écrire...).

Exercice 2.

a) C'est faux : il suffit de prendre le morphisme $f : x \mapsto x^2$ de la droite affine $X = \operatorname{Spec}(k[x])$ dans elle-même, où k est un corps algébriquement clos. Alors f est surjectif (par exemple parce que l'image ensembliste de f contient tous les $\bar{k}$-points de X et aussi le point générique), mais pas lisse (la fibre en $x = 0$ est isomorphe à $\operatorname{Spec}(k[x]/x^2)$, qui n'est pas régulier).

b) C'est faux : soit $Y = \operatorname{Spec} A$, où A est un anneau intègre non normal, de dimension 1 et noethérien; supposons de plus que la fermeture intégrale $\widetilde{A}$ de A dans son corps des fractions soit finie sur A (par exemple $A = \mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$); alors le morphisme de normalisation $f : \widetilde{X} \to X$ est fini, donc surjectif (via le théorème de Cohen-Seidenberg) et $\tilde{X}$ est régulier (car noethérien, normal et de dimension 1).

c) C'est vrai : comme k est algébriquement clos, il est parfait donc X et Y sont lisses sur $\operatorname{Spec} k$. Par changement de base, le morphisme $X \times_k Y \to Y$ est lisse et par composition $X \times_k Y \to \operatorname{Spec} k$ est également lisse, ce qui implique que $X \times_k Y$ est régulier.

Exercice 3.

1. a) Soit $U = \operatorname{Spec} A$ un ouvert affine. Alors la restriction de $\mathcal{K}$ à U est le faisceau constant K, qui n'est autre que $\widetilde{K}$ vu que tous les localisés de K sont égaux à K. Ainsi $\mathcal{K}$ est quasi-cohérent. En général $\mathcal{K}$ n'est pas cohérent vu que $K = \operatorname{Frac} A$ n'est pas un A-module de type fini (ex. $A = \mathbf{Z}$).

b) Pour tout ouvert U de X, on peut considérer la restriction au point générique $\mathcal{O}_X(U) \to K$, ce qui donne un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_X$ vers $\mathcal{K}$. Ce morphisme est injectif car pour $U = \operatorname{Spec} A$ affine, on a que $\mathcal{O}_X(U) = A \to \mathcal{K}(U) = K = \operatorname{Frac} A$ est injectif; or les ouverts affines forment une base de la topologie de X.

2. Comme $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent (quotient de deux faisceaux quasi-cohérents), la restriction de $\mathcal{F}$ à U est isomorphe à $\widetilde{\mathcal{F}(U)}$. La suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{K} \to \mathcal{F} \to 0$$

reste exacte quand on prend les sections globales vu que $\mathcal{O}_X$ est quasi-cohérent. Ainsi $\mathcal{F}(U) = K/A$ comme on voulait.

3. a) Comme $X - \Omega$ est un fermé strict de X, on a que ses composantes irréductibles sont de dimension 0 vu que X est irréductible de dimension 1. Ces composantes irréductibles sont donc des singletons, et comme X est noethérien il n'y en a qu'un nombre fini.

b) Comme U est réunion finie d'ouverts affines, il suffit de traiter le cas où $U = \operatorname{Spec} A$ est affine. D'après 2., on peut voir s comme un élément de K/A et il s'agit de voir que $s_\wp = 0$ pour presque tout $\wp \in \operatorname{Spec} A$. Or s est l'image dans K/A d'un élément $t = t_1/t_2$ de K avec $t_1 \in A$ et $t_2 \in A$ non nul. Si $\wp \in D(t_2)$, alors $t \in A_\wp$ donc $s_\wp = 0$ dans $(K/A)_\wp$. D'autre part $D(t_2)$ est non vide car t_2 n'est pas nilpotent dans l'anneau intègre A. Comme le complémentaire de $D(t_2)$ dans U est fini d'après 3.a), on obtient le résultat.

c) D'après 3.b), on peut maintenant définir un morphisme de faisceaux $\mathcal{F} \to \bigoplus_{x \in X} Q_x$ en envoyant (si U est un ouvert) toute section $s \in \mathcal{F}(U)$ sur la famille des restrictions $(s_x)_{x \in U}$ (d'après 2., la tige de $\mathcal{F}$ en x est $K/\mathcal{O}_{X,x}$). On obtient un isomorphisme de faisceaux car c'est un isomorphisme au niveau des tiges (noter que Q_x est nul si x est le point générique, et si x est un point fermé c'est le faisceau dont la tige est nulle partout sauf en x où elle vaut $K/\mathcal{O}_{X,x}$).

4. On prend les sections globales dans la suite de 3.c). Comme on sait que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $X = \mathbf{P}^1_k$, la suite

$$0 \to k \to K \to \bigoplus_{x \in x} K/\mathcal{O}_{X,x} \to 0$$

est exacte, ce qui donne le résultat.

Exercice 4.

1. Les schémas X et Y sont noethériens et séparés. Comme $\mathcal{F}$ et $f_*\mathcal{F}$ sont quasi-cohérents, on peut donc calculer la cohomologie par le complexe de Čech d'un recouvrement affine. Soit donc $\mathcal{V} = (V_i)$ un recouvrement affine de Y. Posons $U_i = f^{-1}(V_i)$. Comme f est un morphisme affine, le recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)$ est également affine. Alors par définition de f_*, les groupes $C^p(\mathcal{V}, f_*\mathcal{F})$ du complexe de Čech sont égaux à $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. D'où le résultat.

2. D'après le théorème de Serre, on peut trouver un faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur Y tel que $H^1(Y, \mathcal{G})$ soit non nul. D'autre part $f^*\mathcal{G}$ reste cohérent et $H^1(X, f^*\mathcal{G}) = 0$ puisque X est affine.

3. On prend pour Y le plan affine sur un corps k et pour X l'ouvert obtenu en enlevant le point $(0, 0)$. On sait alors que X n'est pas affine. On peut donc (théorème de Serre) trouver $\mathcal{F}$ cohérent sur X tel que $H^1(X, \mathcal{F}) \neq 0$. Pourtant $H^1(Y, f_*\mathcal{F}) = 0$ puisque $f_*\mathcal{F}$ est quasi-cohérent et Y est affine.