Corrigé de l'examen du cours de M2 "Géométrie algébrique"

Université d'Orsay (D. Harari)

Exercice 1

1. Prenons par exemple $X = \operatorname{Spec} A$ avec $A = \mathbf{Z}[t]/(t^2 - 2)$, le morphisme f étant induit par l'injection $\mathbf{Z} \to A$. Alors f est fini et plat car $\mathbf{Z}$ est régulier de dimension 1 avec f dominant et X est intègre. Mais f n'est pas lisse car la fibre au point fermé de $\mathbf{Z}$ correspondant à l'idéal premier (2) est le spectre de $(\mathbf{Z}/2[t])/t^2$, qui n'est pas régulier.

2. Comme f est fini, il est affine. Soit $V = \operatorname{Spec} A$ un ouvert affine de Y d'image réciproque $U = \operatorname{Spec} B$. Alors $f_* \mathcal{O}_X(V) = B$ est fini et plat sur A, il est donc localement libre (exemple e) page 70 des notes).

3. D'après le résultat admis, l'image ensembliste de f est un ouvert et on peut donc supposer que f est ensemblistement surjective (donc bijective) puisque c'est une immersion. Montrons alors que c'est un isomorphisme. Pour tout x de X d'image y, l'homomorphisme induit $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif (parce que f est une immersion fermée) et fait de $\mathcal{O}_{X,x}$ un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module libre (via **2.**). Ainsi c'est un isomorphisme et f est un isomorphisme.

Exercice 2

1. Supposons que X s'écrive $X = X_1 \cup X_2$, où X_1 et X_2 sont des fermés non vides disjoints. Alors Y est réunion des images ensemblistes non vides $f(X_1)$ et $f(X_2)$, qui sont fermées par propreté de f. Comme Y est connexe, ces images ne peuvent pas être disjointes. Il existe alors $y \in Y$ telles que X_1 et X_2 rencontrent tous deux la fibre X_y (qui est ensemblistement $f^{-1}(y)$). Ainsi $X_1 \cap X_y$ et $X_2 \cap X_y$ sont deux fermés non vides de X_y, disjoints, et dont la réunion est X_y, contradiction avec la connexité de X_y.

2. On n'a pas l'analogue. Posons $A = k[t]$ (où k est un corps, disons algébriquement clos pour simplifier), $Y = \operatorname{Spec} A$ et $X = \operatorname{Proj} A[x_0, x_1]/t(x_0 + x_1)$, f étant le morphisme naturel. Alors f est propre et les fibres de f sont intègres car la fibre en λ est isomorphe à $\operatorname{Proj}(k[x_0, x_1]/\lambda(x_0 + x_1))$. Pourtant X n'est pas intègre car par exemple l'ouvert $V_+(x_0)$ est isomorphe à $\operatorname{Spec}(k[t, x_1]/t(1 + x_1))$.

Exercice 3

1. Oui : en effet si $x \in M$, x appartient au sous-module de type fini engendré par x.

2. Écrivons $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, où M est un A-module. Soit (M_λ) la famille des sous-modules de type fini de M, posons $\mathcal{F}_\lambda = \widetilde{M_\lambda}$. Les $\mathcal{F}_\lambda$ sont des sous-faisceaux de $\mathcal{F}$ car le foncteur $\widetilde{\ }$ est exact, et ils sont cohérents car M_λ est de type fini. Si $V = D(g)$ est un ouvert principal, on a $\mathcal{F}(V) = M_g$ mais tout élément de M est dans l'un des M_λ d'après **1.**, donc M_g est inclus dans la réunion des $(M_\lambda)_g = \mathcal{F}_\lambda(V)$, d'où iii). Enfin si J est une sous-famille finie de Λ, le sous-module somme des M_λ contient tous les M_λ et est de type fini, il s'écrit donc M_β pour un certain $\beta \in \Lambda$. On en déduit ii) par exactitude de $\widetilde{\ }$.

3. a) Posons $\mathcal{F} = f_*\mathcal{G}$, c'est un faisceau quasi-cohérent sur X. Appliquons **2.**. Sur chaque ouvert affine principal U_i du recouvrement, $\mathcal{F}(U_i) = \mathcal{G}(U_i)$ est réunion des $\mathcal{F}_\lambda(U_i)$. Comme $\mathcal{G}(U_i)$ est un $\mathcal{O}_X(U_i)$-module de type fini (parce que $\mathcal{G}$ est cohérent), il est engendré par un nombre fini d'éléments, chacun de ces éléments étant dans l'un des $\mathcal{F}_\lambda(U_i)$. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'indices i, on peut trouver une sous-famille finie $J \subset \Lambda$ telle que pour tout i, le module $\mathcal{F}_\lambda(U_i)$ soit engendré par des éléments de $\bigcup_{\lambda \in J} \mathcal{F}_\lambda(U_i)$. Mais d'après **2.**, propriété ii), on peut trouver un indice $\beta \in \Lambda$ tel que $\mathcal{F}_\beta$ contienne tous les $\mathcal{F}_\lambda$ pour $\lambda \in J$. Posons alors $\mathcal{R} = \mathcal{F}_\beta$, alors $\mathcal{R}(U_i) = \mathcal{F}(U_i) = f_*\mathcal{G}(U_i)$ pour tout i puisque $\mathcal{R}(U_i)$ contient une famille de générateurs du module $\mathcal{F}(U_i)$.

b) La restriction de $\mathcal{R}$ à U est un faisceau quasi-cohérent. Sa restriction à chaque ouvert affine U_i est donc $\widetilde{\mathcal{R}(U_i)}$, qui est aussi $\widetilde{\mathcal{G}(U_i)} = \mathcal{G}_{|U_i}$ d'après a). Comme les U_i recouvrent U, La restriction de $\mathcal{R}$ à U est isomorphe à $\mathcal{G}$.

Exercice 4 (7 points)

1. L'injectivité est évidente (une section nulle sur V et en dehors de Z est nulle vu que $Z \subset V$). Pour la surjectivité, si s est dans $\Gamma_Z(V, \mathcal{F})$, on la relève dans $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ en recollant la section nulle sur $X - Z$ et $s \in \Gamma(V, \mathcal{F})$, ce qui est licite puisque les deux coïncident sur l'intersection $V \cap (X - Z)$.

2. a) Les suites données sont des complexes dont la cohomologie est respectivement donnée par les $H^i(X, \mathcal{F})$ et les $H^i(U, \mathcal{F})$ pour $i > 0$. Comme U et X sont affines et $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent, on a le résultat.

b) Comme I^j est injectif, on sait qu'il est flasque, d'où le résultat.

c) On écrit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\Gamma_Z(X, I^0) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_Z(X, I^1) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_Z(X, I^2) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_Z(X, I^3) \arrow[d] \\
\Gamma(X, I^0) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, I^1) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, I^2) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, I^3) \arrow[d] \\
\Gamma(U, I^0) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(U, I^1) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(U, I^2) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(U, I^3) \arrow[d] \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

On sait que les colonnes sont exactes, ainsi que les deux dernières lignes et il s'agit de montrer que le complexe

$$\Gamma_Z(X, I^1) \to \Gamma_Z(X, I^2) \to \Gamma_Z(X, I^3)$$

est exact, ce qui prouvera que $H^2_Z(X, \mathcal{F}) = 0$ (le raisonnement pour les autres H^i_Z est analogue). Soit a_2 dans $\Gamma_Z(X, I^2)$ d'image nulle dans $\Gamma_Z(X, I^3)$. Alors l'image b_2 de a_2 dans $\Gamma(X, I^2)$ se relève en un b_1 de $\Gamma(X, I^1)$. Comme l'image de b_1 dans $\Gamma(U, I^2)$ est nulle, l'image c_1 de b_1 dans $\Gamma(U, I^1)$ provient de $\Gamma(U, I^0)$. Par surjectivité de la flèche tout en bas à gauche, on peut, quitte à modifier b_1 par un élément de l'image de $\Gamma(X, I^0)$, supposer que $c_1 = 0$. Alors b_1 provient de $\Gamma_Z(X, I^1)$, dont l'image dans $\Gamma_Z(X, I^2)$ est a_2 par injectivité de la flèche $\Gamma_Z(X, I^2) \to \Gamma(X, I^2)$ (qui envoie a_2 sur b_2).

3. D'après **1.**, les foncteurs $\Gamma_Z(X, .)$ et $\Gamma_Z(V, .)$ sont les mêmes, donc aussi leurs dérivés. Le résultat vient alors de **2.** c).