Corrigé de l'examen du cours de M2 "Géométrie algébrique" (31 janvier 2007).

Exercice 1.

1. Soient x et y deux points de X. Soient U un ouvert affine de X contenant x et V un ouvert affine de X contenant y. Alors $U \cap V$ est non vide car X est intègre, donc irréductible. On peut donc trouver un point z dans $U \cap V$. Alors $f(x) = f(z) = f(y)$. Ainsi f est constant.

2. Si U est un ouvert affine de X, alors par fonctorialité l'homomorphisme $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ associé à $f_{|U}$ se factorise par la restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Comme $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = A$ et $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) = B$, le résultat en découle (noter que la restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to B$ est bien injective car X est intègre).

3. D'après a), il suffit de montrer que la restriction de f à tout ouvert affine $U = \operatorname{Spec} B$ de X est constante. Comme X est projectif et géométriquement intègre sur k, on a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ (Corollaire 10.9). D'après b), $f_{|U}$ se factorise alors par un morphisme $\operatorname{Spec} k \to Y$. En particulier $f_{|U}$ est constant puisque $\operatorname{Spec} k$ est réduit à un point.

4. a) Comme X est projective sur k, X est propre sur k et par changement de base il en va de même de p_2. En particulier p_2 est une application fermée. Comme $f^{-1}(F)$ est fermé (image réciproque d'un fermé par une application continue), on obtient que $p_2(f^{-1}(F))$ est un fermé de Y. D'autre part $y_0 \notin p_2(f^{-1}(F))$. En effet, on aurait sinon un point t de $X \times_k Y$ avec $p_2(t) = y_0$ et $f(t) \in F$. Mais si $p_2(t) = y_0$, alors $f(t) = z_0$ par hypothèse[1] d'où une contradiction car $z_0 \notin F$. Finalement $F \neq Y$.

b) Soit U le complémentaire de $p_2(f^{-1}(F))$ dans Y. D'après a), c'est un ouvert non vide de Y. Si $y \in U(k)$, alors l'image I_y de φ_y ne rencontre pas $f^{-1}(F)$ car p_2 est constante égale à y sur I_y, et y n'est pas dans $p_2(f^{-1}(F))$ par hypothèse. Ainsi $f(I_y) \subset V$ et $f \circ \varphi_y$ est à valeurs dans V. Alors $f \circ \varphi_y$ induit par restriction un morphisme $X \to V$. D'après **3.**, ce morphisme est constant car V est affine et X est géométriquement intègre sur k vu que X est intègre et k algébriquement clos.

c) Un k-point de $X \times_k U$ s'écrit (x, y) avec $x \in X(k)$ et $y \in U(k)$. On a alors $(f \circ \psi_0 \circ p_2)(x, y) = f(x_0, y) = (f \circ \varphi_y)(x_0)$. D'après **4.** b), ceci est aussi $(f \circ \varphi_y)(x) = f(x, y)$ car $f \circ \varphi_y$ est constant quand $y \in U(k)$. Ainsi les deux morphismes considérés coïncident ensemblistement sur les k-points de $X \times_k U$. Notons que $X \times_k U$ est intègre : en effet si $\operatorname{Spec} A$ et $\operatorname{Spec} B$ sont des ouverts affines non vides (donc denses) respectifs de X et U, alors A et B sont des k-algèbres intègres et de type fini donc comme k est algébriquement

[1] ceci résulte de ce que φ_{y_0} induit un isomorphisme de X sur la fibre $p_2^{-1}(y_0)$.

clos, Spec $(A \otimes_k B)$ reste intègre; or c'est un ouvert dense de $X \times_k U$. Alors, les deux morphismes considérés coïncident en tant que morphismes de $X \times_k U$ dans Z d'après le résultat admis.

d) Comme Z est séparé sur k et $X \times_k Y$ est réduit, on obtient finalement via la proposition 5.7. que f et $f \circ \psi_0 \circ p_2$ sont égaux car $X \times_k U$ est un ouvert non vide (donc dense) de $X \times_k Y$. Il suffit alors de prendre $g = f \circ \psi_0$.

Exercice 2.

1. a) On peut trouver un recouvrement ouvert (U_i) de X tel qu'on ait des écritures $D = (U_i, f_i)$, $D_1 = (U_i, g_i)$, $D_2 = (U_i, h_i)$ où $f_i \in K^*$ et g_i, h_i sont dans $\mathcal{O}_X(U_i)$ (la dernière condition vient de ce que D_1 et D_2 sont effectifs). Alors comme $D \simeq D_1$ et $-D \simeq D_2$, on peut trouver des éléments u, v de K^* tels que $f_i = g_i u^{-1}$ et $f_i^{-1} = h_i v^{-1}$ pour tout i. Alors $f_i u = g_i$ et $f_i^{-1} v = h_i$ sont dans $\mathcal{O}_X(U_i)$ comme on voulait.

b) On obtient $g_i h_i = uv$, donc uv est en fait dans $\mathcal{O}_X(X)$ puisque sa restriction à tous les U_i est dans $\mathcal{O}_X(U_i)$. Comme X est projective et géométriquement intègre sur k, on obtient que $uv = \lambda$ avec $\lambda \in k^*$.

c) On a $f_i u = g_i$ et $f_i^{-1} v = h_i$ d'où $\lambda = g_i h_i$. Comme g_i et h_i sont dans $\mathcal{O}_X(U_i)$ et λ est dans k^*, on obtient que g_i est en fait dans $\mathcal{O}_X(U_i)^*$. Cela signifie que $D = (U_i, g_i u^{-1}) = (U_i, u^{-1})$ est principal.

2. Comme X est intègre, tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X s'écrit (d'après la Prop. 8.11) $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}(D)$. Comme $H^0(X, \mathcal{L})$ est non nul si et seulement s'il existe un diviseur effectif équivalent à D (Prop. 12.1), on obtient que D vérifie les hypothèses de **1.**. Ainsi $D \simeq 0$ et $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X$.

3. D'après **2.**, dire que la classe de $\mathcal{L}$ est dans le noyau de θ signifie que $H^0(\bar{X}, \pi^*\mathcal{L})$ et $H^0(\bar{X}, \pi^*\mathcal{L}^{-1})$ sont tous deux non nuls. Mais les dimensions sur $\bar{k}$ de ces espaces vectoriels sont respectivement les mêmes que les dimensions sur k de $H^0(X, \mathcal{L})$ et $H^0(X, \mathcal{L}^{-1})$, d'où le résultat.

Exercice 3.

1. a) Soit $U_i = D_+(T_i)$. Alors chaque ouvert $U = U_{i_0, \dots, i_p}$ intervenant dans le complexe de Čech est affine. Par hypothèse, le A-module $N = \mathcal{F}(U)$ est plat. D'autre part, la restriction du faisceau $\mathcal{O}_X(m)$ à U est isomorphe à $\mathcal{O}_U$, car U est inclus dans l'un au moins des U_i, et la restriction de $\mathcal{O}_X(m)$ à chaque U_i est isomorphe à $\mathcal{O}_{U_i}$ (Prop. 7.14). Ainsi $\mathcal{F}(m)(U)$ est isomorphe à $\mathcal{F}(U)$ comme $\mathcal{O}_X(U)$-module, donc a fortiori comme A-module; il est donc plat sur A et tous les termes du complexe de Čech (qui sont des sommes directes d'un nombre fini de tels modules) aussi.

2. Comme $\mathcal{F}$ est cohérent, on peut (Th. 10.7) trouver m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$, les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{F}(m))$ soient nuls pour $i > 0$, ou encore tel que les groupes $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m))$ soient nuls car $\mathcal{U}$ est un recouvrement affine et le Th. 10.4. s'applique. Cela signifie exactement que la suite

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}(m)) \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \to ... \to C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \to 0$$

est exacte.

3. D'après le rappel, le noyau de $C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \to C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m))$ est plat sur A, puisque d'après **2.**, les A-modules $C^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m))$ sont plats. Comme ce noyau est aussi l'image de $C^{n-2}(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \to C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m))$, on en déduit (toujours d'après le rappel) que le noyau de cette dernière flèche est plat sur A. Par récurrence descendante, $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) = H^0(X, \mathcal{F}(m))$ est plat sur A. Comme il est de type fini avec A local, il est libre de type fini sur A (6.3., exemple d)).

4. Comme $\mathcal{F}$ est cohérent, il est (d'après la Prop. 7.21.) isomorphe à $\widetilde{P}$ avec

$$P = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} H^0(X, \mathcal{F}(m))$$

Mais $\widetilde{P} = \widetilde{M}$, où $M = \bigoplus_{m \geq m_0} H^0(X, \mathcal{F}(m))$ puisque M est obtenu à partir de P en gardant les termes de degré au moins m_0. Maintenant M est une somme directe de A-modules libres d'après **3.**, donc il est libre sur A.