Corrigé de l'examen du 10 février 2010.

Exercice 1.

1. a) D'après le théorème 6.25. (et la remarque qui le suit), le morphisme f est plat. D'après le corollaire 6.31., la fibre X_y (qui n'est pas vide vu que $y = f(x)$) est donc de dimension $\dim X - \dim Y = 0$.

b) La fibre X_y est un $k(y)$-schéma de type fini (par changement de base) et de dimension 0. On sait alors (exemple b) page 53) que X_y est affine, soit $X_y = \operatorname{Spec} A$, où A est une $k(y)$-algèbre de type fini et de dimension 0. D'après le lemme de normalisation de Noether, A est de dimension finie sur $k(y)$ donc le morphisme $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec}(k(y))$ est bien fini (car "fini" est une propriété locale sur la base).

Remarque : En général le morphisme f n'est pas fini (considérer une immersion ouverte). En revanche, si les courbes X et Y sont propres, on sait de plus que f est propre, ce qui permet de conclure qu'il est fini (par exemple grâce au "main theorem" de Zariski).

2. a) Comme $\widetilde{X}$ est normal, la propriété universelle de $\widetilde{Y}$ implique qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \widetilde{Y} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Maintenant $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ restent intègres et de type fini sur k. Ils sont de dimension 1 (ils ont respectivement même corps de fonctions que X et Y), avec $\tilde{f}$ non constant (sinon f serait constant vu que p est surjectif). Comme q est fini, la fibre de q en y est (topologiquement) réunion disjointe d'un nombre fini de points, et $\widetilde{X}_y$ est donc union disjointe d'un nombre fini de fibres de $\tilde{f}$, qui sont de dimension 0 d'après 1.b). Ainsi $\widetilde{X}_y$ est de dimension 0.

b) On a

$$\widetilde{X} \times_X X_y = \widetilde{X} \times_X (X \times_Y \mathrm{Spec}\,(k(y)) = \widetilde{X} \times_Y \mathrm{Spec}\,(k(y))$$

d'où le résultat par définition de $\widetilde{X}_y$.

c) Avec b), on obtient que le morphisme $\widetilde{X}_y \to X_y$ est fini par changement de base. Il est surjectif vu que p est surjectif donc $\dim X_y = \dim \widetilde{X}_y = 0$ via le théorème 4.13. De ce fait la conclusion de 1.a) vaut encore. On en déduit alors exactement comme en 1.b) que le résultat de 1.b) est également encore valable.

Exercice 2.

1. Notons que Y est intègre vu que $P - 1$ est irréductible dans l'anneau factoriel R. Pour voir que Y est régulier, on peut supposer (quitte à remplacer Y par $Y \times_k \bar{k}$) que k est algébriquement clos; on utilise alors le critère jacobien. Soit $(a_{11}, ...a_{nn}) \in k^n$ un point fermé de $Y \subset \mathbf{A}_k^{n^2}$. Comme $\det([a_{ij}]) = 1$, l'un des mineurs de taille $n - 1$ de la matrice $[a_{ij}]$ est non nul, par exemple le mineur m_{11} correspondant à supprimer la première ligne et la première colonne. Mais la formule de développement du déterminant par rapport à la première ligne donne que la dérivée partielle de $P - 1$ en $(a_{11}, ...a_{nn})$ par rapport à X_{11} est précisément m_{11}, d'où le résultat.

2. La formule de développement du déterminant par rapport à la première ligne donne une écriture $P-1 = X_{11}Q+V$, où Q et V sont des polynômes non constants ne contenant pas X_{11} dans leur écriture. Soit U l'ouvert principal $D(Q)$ de Y. Il est non vide car l'image de Q (notée encore Q) dans l'anneau intègre $(R/(X_{11}Q + V))$ est non nulle (en regardant le degré en X_{11}, on voit que $X_{11}Q + V$ ne peut pas diviser Q dans R). Ainsi U est dense car Y est intègre. L'ouvert U est isomorphe à $\mathrm{Spec}\,A$, avec $A = (R/(X_{11}Q + V))_Q$. On définit alors un homomorphisme φ de $k[X_{12}, ..., X_{nn}]_Q$ dans A (qui induit un morphisme de U dans l'ouvert $D(Q)$ de $\mathbf{A}_k^{n^2-1}$) en envoyant chaque X_{ij} sur son image canonique dans A. La surjectivité de φ vient de l'égalité $X_{11} = -V/Q$ dans $A = (R/(X_{11}Q + V))_Q$, où V et Q sont des polynômes qui ne contiennent pas X_{11} dans leur écriture. L'injectivité vient de ce qu'un polynôme $P \in k[X_{12}, ..., X_{nn}]$ ne peut pas être un multiple non nul dans R de $X_{11}Q + V$ parce que le degré en X_{11} de $X_{11}Q + V$ est 1.

Exercice 3.

1. a) L'homomorphisme $A \to B$ induit par f est la restriction du morphisme de corps (bien défini parce que f est dominant) $\varphi : K(Y) \to K(X)$.

En particulier A s'identifie à un sous-anneau de B. Mais comme φ est un isomorphisme, B s'identifie à un sous-anneau de $K(Y) = \operatorname{Frac} A$ (cette dernière égalité vient de ce que Y est affine), donc la seule possibilité est $\operatorname{Frac} A = \operatorname{Frac} B$.

b) Comme f est projectif, l'anneau B est un A-module de type fini par le théorème 9.10. En particulier B est entier sur A. Comme A est normal et que B a pour corps des fractions $\operatorname{Frac} A$, ceci implique $B = A$.

2. La question étant locale sur Y, on peut supposer $Y = \operatorname{Spec} A$, auquel cas le résultat découle de 1.b).

Exercice 4.

1. Comme X est nothérien, on peut en trouver un recouvrement par un nombre fini N d'ouverts affines. D'après le théorème 9.6., on peut calculer $H^i(X, \mathcal{F})$ via la cohomologie de Čech, ce qui donne le résultat.

2. a) Il suffit d'appliquer le corollaire 7.20 car tout faisceau tordu $\mathcal{O}_X(m)$ est localement libre de rang 1.

b) Appliquons a). On peut donc écrire une suite exacte

$$0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to 0$$

avec $\mathcal{G}$ localement libre de type fini. D'après 1., on peut déjà trouver $N > d$ tel que la propriété cherchée soit vraie pour tout $i \geq N$. Montrons alors cette propriété par récurrence descendante sur l'entier i tel que $d < i \leq N$. On vient de voir qu'elle est vraie pour $i = N$. Supposons la vraie pour un entier $i + 1$ (avec $d < i < N$), et montrons-la pour i. On a une suite exacte de cohomologie

$$H^i(X, \mathcal{G}) \to H^i(X, \mathcal{F}) \to H^{i+1}(X, \mathcal{H})$$

Or $H^i(X, \mathcal{G}) = 0$ par hypothèse (parce que $\mathcal{G}$ est localement libre) et on a aussi $H^{i+1}(X, \mathcal{H}) = 0$ par hypothèse de récurrence (l'$\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{H}$ est cohérent comme noyau d'un morphisme de faisceaux cohérents). Ainsi on obtient $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ comme on voulait.

Remarque : Le résultat reste vrai si on suppose seulement que X est quasi-projectif sur A; il suffit de suivre la même méthode (en utilisant pour le a) qu'un faisceau cohérent sur un ouvert d'un schéma nothérien Y est la restriction d'un faisceau cohérent sur Y).