Corrigé du partiel du cours de M2 "Géométrie algébrique"

Exercice 1.

1. a) L'adhérence $F' = \overline{\{x\}}$ de x est un fermé de X, qui est irréductible (puisqu'il possède un point dont l'adhérence est F') et inclus dans F. Par minimalité de F, on a $\overline{\{x\}} = F$.

b) Munissons F d'une structure de sous-schéma fermé de X (par exemple la structure réduite). D'après a), tout point de F en est un point générique; mais on a vu qu'un schéma irréductible avait un unique point générique, ce qui montre que F (qui n'est pas vide) est un singleton.

2. a) Tout d'abord $U \cap G$ est un ouvert non vide de G, donc il contient y (qui est dense dans G) et d'autre part G est irréductible vu qu'il contient y comme point générique. Maintenant $U \cap G$ est irréductible (ouvert non vide d'un irréductible) et c'est un fermé de U. On sait alors qu'il s'écrit $V(\wp)$, où $\wp$ est l'idéal premier de A correspondant au point générique de $U \cap G$, i.e. à y.

b) Soit I l'idéal premier (qui est d'ailleurs maximal) de A correspondant à x. Comme x est dans $(U \cap G) = V(\wp)$, on a $I \supset \wp$, ce qui montre que $\mathcal{O}_{X,y} = A_\wp$ est un localisé de $\mathcal{O}_{X,x} = A_I$ (car la partie multiplicative $A - \wp$ contient la partie multiplicative $A - I$).

3. a) Comme X est non vide, il possède un fermé irréductible (par exemple l'adhérence d'un point quelconque de X). Comme X est noethérien, on peut donc choisir un fermé irréductible minimal F. D'après 1.b), F est réduit à un point, qui est donc un point fermé de X.

b) Soit y un point de X. Soit G l'adhérence de y. Alors G (muni par exemple de sa structure réduite de sous-schéma fermé de X) est un schéma noethérien, il possède donc un point fermé x (qui est aussi fermé dans X) d'après a). Maintenant d'après 2.b) l'anneau $\mathcal{O}_{X,y}$ est un localisé de $\mathcal{O}_{X,x}$ qui est réduit par hypothèse, ce qui montre que $\mathcal{O}_{X,y}$ est réduit. Finalement X est réduit.

Remarque : Le résultat vaut encore (par exemple via Zorn) en supposant seulement X quasi-compact (il existe en effet dans ce cas un fermé non vide minimal, qui est forcément alors irréductible).

Exercice 2.

1. Soit z dans $X \times_S Y$. Par définition du produit fibré, sa projection x sur X et sa projection y sur Y vérifient $f(x) = g(y)$ puisque les projections sont des S-morphismes.

2. a) Soient $k(s)$, $k(x)$, $k(y)$ les corps résiduels respectifs de s, x, y. Les morphismes structuraux f, g induisent des morphismes de corps $k(s) \to k(x)$ et $k(s) \to k(y)$. On peut alors trouver un corps K (par exemple le composé de $k(x)$ et $k(y)$) équipé de $k(s)$-morphismes $k(x) \to K$ et $k(y) \to K$. En composant les morphismes associés $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec}(k(x))$ et $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec}(k(y))$ avec les morphismes $\operatorname{Spec}(k(x)) \to X$ et $\operatorname{Spec}(k(y)) \to Y$ canoniquement associés à x et y, on obtient les morphismes f_1 et f_2 cherchés.

b) D'après a), on dispose d'un morphisme $\operatorname{Spec} K \to X \times_S Y$ par définition du produit fibré. En particulier $X \times_S Y$ est non vide.

Exercice 3.

1. a) Comme b n'est pas nilpotent, l'image de 1 dans B_b est non nulle, donc l'anneau B_b est non nul; en particulier il possède un idéal maximal.

b) On observe que B_b est une k-algèbre de type fini. D'après le théorème des zéros de Hilbert (ou le fait que les points fermés d'un schéma de type fini sur k ont pour corps résiduel une extension finie de k, qui est par hypothèse algébriquement clos), on a $B_b/I = k$. Comme $B/\rho^{-1}(I)$ est une k-algèbre qui s'injecte dans B_b/I (via ρ), on obtient que $B/\rho^{-1}(I) = k$ est un corps, donc $\rho^{-1}(I)$ est un idéal maximal de B. Il ne contient pas b car I ne contient pas $\rho(b)$ qui est par définition inversible dans B_b.

2. a) Le k-point x correspond à un morphisme $\operatorname{Spec} k \to X$, ou encore à un k-homomorphisme $u : A \to k$. Le k-point $f(x)$ de $\mathbf{A}_k^n$ est donné par l'homomorphisme $v = u \circ \varphi : k[T_1, ..., T_n] \to k$. Comme v envoie chaque T_i sur $u(f_i) = f_i(x)$, on obtient bien $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$.

b) Supposons que ψ ne soit pas nilpotent. D'après 1.b), il existe alors un idéal maximal J de A ne contenant pas ψ. Si x est le point fermé de X correspondant à J, alors x est un k-point (toujours parce que X est de type fini sur k algébriquement clos) tel que $\psi(x) \neq 0$. Ainsi on a montré que ψ était nilpotent, et comme A est réduit on a $\psi = 0$.