Corrigé du partiel du cours de M2 "Géométrie algébrique"

Université d'Orsay (D. Harari)

3 décembre 2008

Exercice 1.

1. Notons que $\wp$ est un idéal maximal de A car c'est un point fermé de $\operatorname{Spec} A$. En particulier $\{\wp\} = V(\wp)$. Soit I un idéal premier de A. Alors $I \in X - \{\wp\}$ si et seulement si $I \neq \wp$, ce qui est équivalent à $I \not\supset \wp$. Ceci est encore équivalent à $I \not\supset \wp^n$ parce que I est premier (si x est dans $\wp$ et pas dans I, alors x^n est dans $\wp^n$ et pas dans I), ou encore à $I \not\supset fA$, ce qui se traduit par $f \notin I$, soit $I \in D(f)$.

2. Écrivons $X - \{\wp\} = D(f)$. En passant aux complémentaires, on obtient $\{\wp\} = V(fA)$. On écrit alors la décomposition de l'idéal fA dans l'anneau de Dedekind A :

$$fA = \prod_{i=1}^{r} \wp_i^{\alpha_i}$$

avec les $\wp_i$ premiers et $\alpha_i \geq 1$. Comme tous les $\wp_i$ contiennent alors fA, on a forcément $r = 1$ et $\wp_1 = \wp$ d'où le résultat.

3. Posons $U = X - \{\wp\}$. Si U était affine, l'immersion ouverte $U \to X$ (qui n'est pas un isomorphisme) ne pourrait pas induire un isomorphisme $\varphi : \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U)$. Or φ est injectif (parce que X est intègre) et surjectif : en effet un élément de $\mathcal{O}_X(U)$ est dans tous les A_Q avec Q premier de hauteur 1 vu que $\wp$ (qui est maximal) est de hauteur ≥ 2 via la formule $\dim(A/\wp) + \operatorname{ht} \wp = \dim A$. [1]

4. Notons que $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}$ pour tout $n > 0$ car si $v(x) > 0$, on peut trouver y dans K^* tel que $0 < v(y) < (v(x)/n)$ (par surjectivité de v), ce qui donne $v(x/y^n) > 0$ donc $x/y^n \in A$ et donc $x \in \mathcal{M}^n$. D'autre part $\mathcal{M}$ n'est pas principal car si $f \in \mathcal{M}$, il suffit de prendre un z avec $0 < v(z) < v(f)$

[1] Contrairement à ce que disait la version initiale de l'énoncé, le résultat ne vaut pas sans l'hypothèse que A est de type fini sur un corps : prendre $A = \mathbf{Z}_p[t]$ et $\wp = (pt - 1)A$.

pour que z ne soit pas dans fA. Ainsi $\mathcal{M}^n$ n'est jamais principal si $n > 0$. Pourtant $X - \{\mathcal{M}\} = D(f)$ pour tout f de valuation > 0 car A est un anneau intègre dont le seul idéal premier non nul est $\mathcal{M}$ (si un idéal premier $\wp$ contient $g \neq 0$, alors $v(g) \in \mathbf{Q}^*$ donc tout élément x de $\mathcal{M}$ vérifie $x^n/g \in A$ pour un certain $n > 0$, soit $x^n \in \wp$ d'où $x \in \wp$).

Exercice 2.

1. a) Soit $X = \operatorname{Spec} B$. D'après le lemme de normalisation de Noether, on peut écrire B comme module de type fini (en temps qu'algèbre entière et de type fini) sur $k[T_1, ..., T_n] \hookrightarrow B$ pour un certain n. Cela signifie que le morphisme associé $X \to \mathbf{A}_k^n$ est fini, et il est surjectif car dominant (par injectivité de $k[T_1, ..., T_n] \to B$) et propre (car fini). D'autre part $n = r$ car on sait qu'alors $\dim X = \dim \mathbf{A}_k^n = n$

b) Posons $Y = \operatorname{Spec} C$. Alors $X \times_k Y$ reste fini sur $\mathbf{A}_k^r \times_k Y = \mathbf{A}_C^r$ (les morphismes finis sont stables par changement de base). D'autre part l'homomorphisme $C[T_1, ..., T_r] \to B \otimes_k C$ reste injectif (car k est un corps) donc $\dim(X \times_k Y) = \dim \mathbf{A}_C^r = r + s$ vu que C est noethérien de dimension s.

2. Recouvrons X par des ouverts affines $X_i = \operatorname{Spec} B_i$ et Y par des ouverts affines $Y_i = \operatorname{Spec} C_i$. Alors $X \times_k Y$ est recouvert par les ouverts $X_i \times_k Y_i$, donc sa dimension est le sup des $\dim(X_i \times_k Y_i)$. D'après 1.b), on a $\dim(X_i \times_k Y_i) = r_i + s_i$ avec $r_i = \dim X_i$ et $s_i = \dim Y_i$, vu que Y_i est affine et noethérien et X_i affine et de type fini sur k. Le résultat en découle vu que r est le sup des r_i et s est le sup des s_i.

3. a) Comme $k(T)$ est le localisé de $k[T]$ par rapport à $S = k[T] - \{0\}$, on obtient que $X \times_k L$ est le localisé de $L[T]$ par rapport à $S' = k[T] - \{0\}$, d'après le rappel au début de l'exercice.

b) Ici X et Y sont de dimension zéro. Soit $L = k(u)$. D'après a), $X \times_k Y$ est isomorphe au spectre de $L[T]_{S'}$, qui est un anneau intègre de dimension ≥ 1 vu que ce n'est pas un corps (par exemple $u + t$ n'est pas inversible). Ainsi la formule ne vaut plus.

Exercice 3.

1. On peut prendre par exemple une union disjointe infinie de $\operatorname{Spec} k$, où k est un corps. Ce schéma est recouvert par des ouverts affines $\operatorname{Spec} k$ (qui sont noethériens), mais il n'est pas quasi-compact (on ne peut pas extraire de ce recouvrement un recouvrement fini).

2. Soit $f : X = \operatorname{Spec} A_g \to Y = \operatorname{Spec} A$ une immersion ouverte avec par exemple $A = \mathbf{Z}$ et $g \in \mathbf{Z}$ nombre premier. Alors pour tout y de Y, le morphisme $X_y \to \mathrm{Spec}\,(k(y))$ est l'identité, mais $\mathbf{Z}_g = \mathbf{Z}[1/g]$ n'est pas un $\mathbf{Z}$-module de type fini.

3. Soit X le spectre de $\mathbf{R}[x,y]/(x^2+y^2)$. Alors dans le corps des fonctions K de X, on a $x^2+y^2=0$ donc $(x/y)^2+1=0$, ce qui prouve que ce corps des fonctions contient $\mathbf{C}$. Pourtant, X possède un $\mathbf{R}$-point (donné par $x=y=0$), ce qui exclut que le morphisme structural $X \to \mathrm{Spec}\,\mathbf{R}$ se factorise par le morphisme canonique $\mathrm{Spec}\,\mathbf{C} \to \mathrm{Spec}\,\mathbf{R}$.