Corrigé du partiel

David Harari

2006/2007

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

1. C'est faux. Il suffit de prendre $X = \mathrm{Spec}\,(k \times k)$ ou encore $X = \mathrm{Spec}\,(k[t]/t^2)$. Alors X est fini sur $\mathrm{Spec}\,k$ car c'est le spectre d'une k-algèbre de dimension finie sur k, donc X est propre sur k mais on a respectivement $\mathcal{O}_X(X) = k \times k$ et $\mathcal{O}_X(X) = k[t]/t^2$ qui ne sont pas isomorphes à k (car pas intègres).

2. C'est vrai. Comme X est de type fini sur k, les points fermés sont Zariski-denses (en particulier il y a un point fermé), et comme k est algébriquement clos, le corps résiduel d'un tel point est forcément k (la seule extension finie de corps de k est k).

3. C'est faux (l'hypothèse implique seulement que les applications *ensemblistes* f et g sont égales). Prenons $X = Y = Z = \mathrm{Spec}\,k$, où k est un corps, alors tout couple (f, g) de morphismes de X vers Y vérifie évidemment l'hypothèse; mais il peut y avoir plusieurs homomorphismes de k dans k, par exemple si $k = \mathbf{C}$. L'énoncé est vrai si Z est une partie *ouverte* de X (cas particulier d'un théorème du cours sur les morphismes séparés).

4. C'est vrai. Ensemblistement, g est définie par $g(x) = f(x)$ pour tout x de X. Pour définir le morphisme de faisceaux $g^\# : \mathcal{O}_U \to g_*\mathcal{O}_X$, on note que $g_*\mathcal{O}_X$ n'est autre que la restriction du faisceau $f_*\mathcal{O}_X$ à U; il suffit donc de restreindre le morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ à U pour obtenir $g^\#$ tel que les morphismes f et $i \circ g$ coïncident.

Exercice 2 : Variétés "retract-rationnelles" (16 points)

1. Il suffit de montrer que tout fermé $V(I)$ qui contient y contient x. Soit $\wp$ l'idéal premier correspondant à y. Comme A est local, on a $\wp \subset \mathcal{M}$ donc si $\wp \in V(I)$, alors $\wp \supset I$, d'où $\mathcal{M} \supset I$ et $x \in V(I)$.

2. a) Par définition $X(A)$ est ici l'ensemble des $\operatorname{Spec} k$-morphismes de $\operatorname{Spec} A$ vers $\operatorname{Spec}(k[T_1, ..., T_n])$, ou encore l'ensemble des k-homomorphismes de $k[T_1, ..., T_n]$ vers A. Or se donner un tel k-homomorphisme équivaut à donner les images de chaque T_i, d'où le résultat.

b) Il s'agit de montrer que tout k-morphisme $v : \operatorname{Spec} L \to U$ s'étend en un k-morphisme $u : \operatorname{Spec} A \to U$, sachant que la propriété analogue est vraie pour X. On peut donc étendre v en un k-morphisme $u_1 : \operatorname{Spec} A \to X$; on veut montrer que u_1 est à valeurs dans U, sachant que $u_1(x) \in U$, où x est le point fermé de $\operatorname{Spec} A$. Mais si $y \in \operatorname{Spec} A$, on sait d'après **1.** que x est dans l'adhérence de y. Comme u_1 est continue, $u_1(x)$ est dans l'adhérence de $u_1(y)$. Comme $u_1(x) \in U$ avec U ouvert, cela implique que $u_1(y) \in U$.

c) Il est clair que si Y est l'espace affine, alors $\varphi_{Y,A}$ est surjective car l'application de réduction $A^n \to L^n$ est surjective. D'après b), il en va de même quand Y est un ouvert de l'espace affine. Si maintenant $v \in U(L)$ est un L-point de U, son image par f est un L-point de Y, que l'on peut étendre en un A-point de Y. En prenant l'image de ce A-point par g, on obtient un A-point u de U dont l'image par $\varphi_{U,A}$ est v puisque $g \circ f = \mathrm{id}_U$.

3. a) D'après la définition, on peut remplacer X par n'importe quel ouvert non vide de X, donc par exemple un ouvert affine. Comme X est de type fini sur k, cet ouvert affine est le spectre d'un quotient B de $R = k[T_1, ..., T_n]$ pour un certain n; d'autre part comme X est intègre, B est intègre, donc est le quotient de R par un idéal premier.

b) La k-algèbre A est locale. Le morphisme canonique $i : \operatorname{Spec} L \to X$ définit un L-point de X, qui s'étend donc par hypothèse en un A-point $u : \operatorname{Spec} A \to X$ de X. A ce A-point correspond un k-homomorphisme $\theta : B \to A$. Comme $A = R_\wp$ avec B de type fini sur k, on peut trouver $r \in R$ tel que θ soit à valeurs dans $R_r = R[1/r]$ (il suffit de prendre pour r le produit des dénominateurs des images d'un système générateur de B). Cela signifie que le A-point u s'étend en un k-morphisme $W \to X$, avec $W = D(r)$ ouvert non vide et affine de $\mathbf{A}^n_k = \operatorname{Spec} R$.

c) Soit $W = \operatorname{Spec} C$. Alors g correspond à un k-homomorphisme $C \to L$. Comme $L = \operatorname{Frac} B$ et C est de type fini sur k, on peut supposer que ce k-homomorphisme est à valeurs dans $B_b = B[1/b]$ avec $b \in B$ (même argument que précédemment), i.e. g s'étend en un k-morphisme $f : U \to W$ avec $U = D(b)$ ouvert non vide de X. Par construction, $h \circ f$ est l'immersion ouverte $U \to X$.

d) Soit $Y = h^{-1}(U)$, alors Y est un ouvert non vide de W, donc de $\mathbf{A}^n_k$. D'autre part f est à valeurs dans Y car $h \circ f$ envoie U dans U. Soit $f_1 : U \to Y$ la restriction de f et soit $h_1 : Y \to U$ celle de h. Alors $h_1 \circ f_1 = \mathrm{id}_U$ comme on voulait.