Examen du cours “Théorie du corps de classes”, M2, Orsay

David Harari

23 mai 2013-Durée 3h; notes de cours autorisées

Tout résultat qui a été vu en cours peut être utilisé sans démonstration. Dans chaque exercice, il est autorisé d'admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure. En général, les questions les plus difficiles se trouvent à la fin de chaque exercice.

Exercice 1 : Vrai ou faux ? (6 points).

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple (en le justifiant) pour celles qui sont fausses (on indiquera d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

1. Soit K un corps p-adique. Soit $n > 0$. Alors les groupes $H^1(K, \mu_n)$ et $H^1(K, \mathbf{Z}/n)$ sont finis et de même cardinal.

2. Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit K une extension algébrique de k. On suppose que $\mathrm{Br}\, K = 0$. Alors il existe une extension finie k' de k, avec $k' \subset K$, telle que $\mathrm{Br}\, k' = 0$.

3. Soit G un groupe fini. Soit A un G-module. Si $H^1(G, A) = 0$, alors on a $H^1(H, A) = 0$ pour tout sous-groupe H de G.

4. Soit k un corps de caractéristique zéro, de clôture algébrique $\bar{k}$. Soit i un entier strictement positif. On suppose que la dimension cohomologique $\mathrm{cd}(k)$ de k vérifie $\mathrm{cd}(k) \leq i$. Alors $H^{i+1}(k, \bar{k}^*) = 0$.

Exercice 2 : Corps locaux (6 points).

Soit K un corps p-adique. On note K^{ab} l'extension abélienne maximale de K. On note U_K^1 le sous-groupe de K^* constitué des x tels que $v(1-x) \geq 1$, où v est la valuation de K.

1. Montrer que la dimension cohomologique $\mathrm{cd}(K^{\mathrm{ab}})$ de K^{ab} est ≤ 1.

2. On pose $G = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$. Montrer que la p-dimension cohomologique $\mathrm{cd}_p(G)$ de G est finie si et seulement si $\mathrm{cd}_p(U_K^1)$ est finie, où le nombre premier p désigne la caractéristique du corps résiduel de K.

3. Soit π une uniformisante de K. On note K_π l'extension totalement ramifiée de K correspondante dans la théorie de Lubin-Tate. Montrer que la torsion p-primaire $\operatorname{Br} K_\pi\{p\}$ de $\operatorname{Br} K_\pi$ est 0, mais qu'on a $\operatorname{Br} K_\pi\{\ell\} \neq 0$ pour tout nombre premier $\ell \neq p$.

Exercice 3 : Corps globaux (8 points).

Soit k un corps de nombres. On dit qu'une extension finie galoisienne K de k est *non ramifiée* si elle est non ramifiée en toute place finie de k, et totalement décomposée en toute place archimédienne de k. On fixe un nombre premier p.

Soit K une extension finie galoisienne non ramifiée de k, dont le groupe de Galois $G = \operatorname{Gal}(K/k)$ est un p-groupe. On suppose que K n'a pas d'extensions qui sont à la fois non ramifiées et cycliques d'ordre p. On note $\Omega_{K,\infty}$ (resp. $\Omega_{K,f}$) l'ensemble des places archimédiennes (resp. finies) de K.

1. a) Montrer que le cardinal $h(K)$ du groupe des classes d'idéaux $\operatorname{Cl}(K)$ de K n'est pas divisible par p.

b) Calculer $\widehat{H}^q(G, \operatorname{Cl}(K))$ pour tout $q \in \mathbf{Z}$.

2. Soit I_K le groupe des idèles de K. On note I_K^1 le sous-groupe de I_K défini par

$$I_K^1 := \prod_{w \in \Omega_{K,\infty}} K_w^* \times \prod_{w \in \Omega_{K,f}} U_w$$

où $U_w = \mathcal{O}_w^*$ est le groupe des unités de l'anneau des entiers de K_w^*.

On note aussi $C_K = I_K/K^*$ le groupe des classes d'idèles de K et $E_K = K^* \cap I_K^1$ le groupe des unités de $\mathcal{O}_K$. On rappelle que $\operatorname{Cl}(K)$ est isomorphe à C_K/C_K^1, où $C_K^1 = I_K^1/E_K$ est l'image de I_K^1 dans C_K.

a) Montrer que $\widehat{H}^q(G, I_K^1) = 0$ pour tout $q \in \mathbf{Z}$ (on pourra s'inspirer du paragraphe 8.1. du cours).

b) Montrer que pour tout $q \in \mathbf{Z}$, on a un isomorphisme $\widehat{H}^q(G, C_K) \simeq \widehat{H}^{q+1}(G, E_K)$.

3. a) Montrer que les groupes $\widehat{H}^0(G, E_K)$ et $\widehat{H}^{-3}(G, \mathbf{Z})$ sont isomorphes.

b) En déduire que le rang de $\widehat{H}^{-3}(G, \mathbf{Z})$ (c'est-à-dire son nombre minimal de générateurs) est au plus r, où r est le nombre de places archimédiennes de k.