# Examen de deuxième session du cours "Théorie du corps de classes", M2, Orsay

David Harari

26 juin 2013-Durée 2h; notes de cours autorisées

*Tout résultat qui a été vu en cours peut être utilisé sans démonstration. Dans chaque exercice, il est autorisé d'admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure. En général, les questions les plus difficiles se trouvent à la fin de chaque exercice.*

**Exercice 1 : Corps $p$-adiques (6 points).**

Soit $p$ un nombre premier impair, on note $v$ la valuation $p$-adique sur $\mathbf{Q}_p$. On rappelle que le groupe multiplicatif $U^1_{\mathbf{Q}_p}$ constitué des $x \in \mathbf{Q}_p$ tels que $v(1-x) \geq 1$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}_p, +)$.

**1.** Montrer que l'équation $x^p = 1$ admet pour seule solution $x = 1$ dans $\mathbf{Q}_p$.

**2.** Montrer que $H^2(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}/p) = 0$. Le résultat est-il encore vrai si on remplace $\mathbf{Z}/p$ par le module galoisien $\mu_p$ des racines $p$-ièmes de l'unité dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$ ?

**3.** Donner un exemple de corps $p$-adique $K$ tel que $H^2(K, \mathbf{Z}/p)$ soit non nul.

**4.** Soit $K$ un corps $p$-adique. Peut-on avoir $\varinjlim_{n \geq 1} H^2(K, \mathbf{Z}/p^n)$ non nul ?

**Exercice 2 : Corps de nombres (14 points).**

Soit $k$ un corps de nombres de clôture algébrique $\bar{k}$. On note $\Omega_{\mathbf{R}}$ l'ensemble des places réelles de $k$. Pour tout groupe abélien $A$, on note $A/2 = A/2A$ le quotient de $A$ par le sous-groupe $2A := \{2x, x \in A\}$. On utilisera également les notations suivantes (page 93) du paragraphe 8.1 des notes de cours : $I = \varinjlim_K I_K$ est le groupe des idèles de $\bar{k}$ et $C = I/\bar{k}^* = \varinjlim_K C_K$ est le groupe des classes d'idèles de $\bar{k}$, les limites étant prises sur les extensions finies $K$ de $k$ (comme d'habitude $I_K$ désigne le groupe des idèles de $K$ et $C_K = I_K/K^*$ son groupe des classes d'idèles).

**1.** a) Soit $G_{\mathbf{R}} := \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$. Montrer que $H^3(G, \mathbf{C}^*) = 0$.

b) Montrer que $H^3(k, I) = 0$.

**2.** a) Montrer que l'application $H^2(k, I) \to H^2(k, C)$ (induite par la surjection canonique $I \to C$) est surjective.

b) En utilisant 1.b), en déduire que $H^3(k, \bar{k}^*) = 0$.

**3.** Montrer que $(\mathrm{Br}\, k)/2$ est isomorphe à $\bigoplus_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} \mathrm{Br}\, k_v$ (on pourra montrer d'abord que $(\mathrm{Br}\, k_v)/2 = 0$ si $v$ n'est pas une place réelle).

**4.** Déduire de 3. et de 2.b) que l'application canonique

$$H^3(k, \mathbf{Z}/2) \to \bigoplus_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} H^3(k_v, \mathbf{Z}/2)$$

est un isomorphisme (utiliser la suite exacte $0 \to \mathbf{Z}/2 \to \bar{k}^* \to \bar{k}^* \to 0$).

**5.** On suppose que l'ensemble $\Omega_{\mathbf{R}}$ des places réelles de $k$ est non vide. On pose $L = k(i) = k(\sqrt{-1})$ et $G := \mathrm{Gal}(L/k)$.

a) Montrer qu'on a une suite exacte de $G$-modules

$$0 \to \mathbf{Z}/2 \to I_G(\mathbf{Z}/2) \to \mathbf{Z}/2 \to 0$$

où $I_G(\mathbf{Z}/2)$ est l'induit du module $\mathbf{Z}/2$ (cf. definition 1.3. page 4 des notes de cours).

b) En déduire que pour tout $r \geq 3$, l'application canonique

$$H^r(k, \mathbf{Z}/2) \to \bigoplus_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} H^r(k_v, \mathbf{Z}/2)$$

est un isomorphisme.