Examen du cours "Cohomologie galoisienne et théorie des nombres" (M2)

Université Paris-Sud (D. Harari)

31 mai 2012; durée : 3h; notes de cours autorisées.

Tout résultat qui a été vu en cours peut être utilisé sans démonstration. Dans chaque exercice, il est autorisé d'admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure. En général, les questions les plus difficiles se trouvent à la fin de chaque exercice.

Dans tout l'examen, l'expression "G-module" (si G est un groupe profini) désigne un G-module *discret*. On rappelle le *théorème d'approximation* suivant (que l'on pourra utiliser sans démonstration) : si k est un corps de nombres et Ω_k est l'ensemble des places de k, alors l'image de k^* dans $\prod_{v \in \Omega_k} k_v^*$ (muni de la topologie produit direct) est dense.

Exercice 1 : Cohomologie d'un G-module particulier (6 points).

Soit G un groupe profini.

1. On considère un G-module M, que l'on suppose isomorphe comme groupe abélien à $\mathbf{Z}^r$ avec $r \in \mathbf{N}^*$. Soit H un sous-groupe ouvert distingué de G, tel que H agisse trivialement sur M. Montrer que $H^1(G, M)$ est isomorphe à $H^1(G/H, M)$.

2. Soit M un G-module isomorphe à $\mathbf{Z}$ comme groupe abélien. Montrer qu'il existe un sous-groupe ouvert distingué H de G, agissant trivialement sur M, et tel que $[G : H] \leq 2$.

3. On fixe un sous-groupe ouvert distingué H de G avec $[G : H] = 2$. Combien y a-t-il de classes d'isomorphismes de G-modules M, isomorphes à $\mathbf{Z}$ comme groupes abéliens, et tels que H agisse trivialement sur M ?

4. Soit H un sous-groupe ouvert distingué de G avec $[G : H] = 2$. On considère le G-module M, isomorphe à $\mathbf{Z}$ comme groupe abélien, et tel que l'action de G sur M soit définie par $g.x = x$ si $g \in H$ et $g.x = -x$ si $g \notin H$.

a) Montrer qu'il existe une suite exacte de G-modules :

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[G/H] \to M \to 0$$

b) Calculer $H^1(G, M)$.

Exercice 2 : Corps p-adiques (7 points).

Soient p un nombre premier et K un corps p-adique. Soit $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe de Galois absolu de K. On note $K(p)$ la *p-extension maximale* de K :

par définition cela signifie que le groupe de Galois $G_K(p) := \mathrm{Gal}\,(K(p)/K)$ est le plus grand quotient de G_K qui soit un pro-p-groupe. On note aussi $U_K = \mathcal{O}_K^*$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K.

On admettra le résultat suivant (cf. exercice 4 du chapitre 5) : pour tout $G_K(p)$-module A de torsion p-primaire et tout $i \geq 0$, l'homomorphisme d'inflation

$$H^i(G_K(p), A) \to H^i(G_K, A)$$

est un isomorphisme. On rappelle également qu'il existe un groupe fini (noté additivement) F tel que $(U_K, \times)$ soit isomorphe à $(F \times \mathbf{Z}_p^N, +)$, où l'on a posé $N := [K : \mathbf{Q}_p]$.

1. On suppose dans toute cette question 1. que K ne contient pas de racine primitive p-ième de 1.

a) Montrer que $H^2(G_K(p), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = 0$.

b) En déduire la p-dimension cohomologique de $G_K(p)$.

c) Calculer (en fonction de l'entier N) la dimension du $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-espace vectoriel $H^1(G_K(p), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ (on remarquera que F est le sous-groupe de torsion de U_K et on calculera d'abord F/pF).

2. On suppose maintenant (jusqu'à la fin de l'exercice) que K contient toutes les racines p-ièmes de 1.

a) Montrer que la p-dimension cohomologique de $G_K(p)$ est 2.

b) Quelle est (en fonction de l'entier N) la dimension du $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-espace vectoriel $H^1(G_K(p), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$?

Exercice 3 : Vrai ou faux ? (7 points).

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies, et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on indiquera d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

1. Soit K un corps p-adique de groupe de Galois absolu $G_K = \mathrm{Gal}\,(\overline{K}/K)$. Soit M un G_K-module fini de cardinal r. Alors le groupe $H^2(G_K, M)$ est de cardinal $\leq r$.

2. Soit k un corps de nombres. Soient v une place de k et k_v le complété correspondant. Alors la restriction $\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\, k_v$ est surjective.

3. Soit G un groupe fini. Soit p un nombre premier qui divise le cardinal de G. Alors pour tout entier $i > 0$, il existe un G-module fini p-primaire M tel que $H^i(G, M) \neq 0$ (on pourra commencer par regarder le cas où $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$).

4. Soit k un corps de nombres. Soient $G_k := \mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k)$ et A un G_k-module fini. On note Ω_k l'ensemble des places de k. Alors l'image de $H^1(k, A)$ dans $\prod_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, A)$ (ce dernier groupe étant muni de la topologie produit direct) est fermée.