Examen du cours "Cohomologie galoisienne et théorie des nombres" (M2)

Université Paris-Sud (D. Harari)

19 mai 2011; durée : 3h; notes de cours autorisées.

Tout résultat qui a été vu en cours peut être utilisé sans démonstration. Dans chaque exercice, il est autorisé d'admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Exercice 1 : Vrai ou faux ? (5 points).

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies, et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on indiquera d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Soit K un corps p-adique de groupe de Galois absolu $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Alors pour tout Γ_K-module discret M et pour tout entier $i \geq 1$, le groupe $H^i(\Gamma_K, M)$ est fini.

b) Soit $r \geq 1$ un entier. Soit k un corps tel que $H^{r+1}(k, \mathbf{Z}) = 0$. Alors k est de dimension cohomologique stricte $\leq r$.

c) Soit G un groupe profini et soit M un G-module discret, de type fini et sans torsion. Alors $H^1(G, M)$ est fini.

d) Soit G un groupe profini. Soit p un nombre premier. On suppose que p divise l'ordre de G (vu comme un nombre surnaturel). Alors la p-dimension cohomologique stricte $\mathrm{scd}_p(G)$ vérifie $\mathrm{scd}_p(G) \geq 2$.

Exercice 2 : Modules divisibles (4 points).

Soit G un groupe profini. Soit M un G-module discret *divisible*, c'est-à-dire que pour tout entier $n > 0$, la multiplication par n est surjective dans M. Pour tout groupe abélien A, on note $A[n]$ le sous-groupe de A constitué des éléments x tels que $nx = 0$ et A/n le quotient de A par le sous-groupe des éléments de la forme ny avec $y \in A$.

1. Montrer que pour tout $n > 0$ et tout $i > 0$, on a une suite exacte

$$0 \to H^{i-1}(G, M)/n \to H^i(G, M[n]) \to H^i(G, M)[n] \to 0$$

2. On suppose que $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ est le groupe de Galois absolu d'un corps p-adique K, et que M est isomorphe en tant que groupe abélien à $(\overline{K}^*)^m$ avec $m \in \mathbf{N}^*$. Montrer que pour tout entier $n > 0$, le groupe $H^i(G, M)[n]$ est fini.

3. On garde les hypothèses de 2. et on suppose de plus qu'il existe une extension finie galoisienne L de K tel que M soit isomorphe en tant que $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}/L)$-module à $(\overline{K}^*)^m$. Montrer que $H^1(G, M)$ est fini.

Exercice 3 : Normes locales et globales (4 points).

Pour toute extension finie séparable L d'un corps K, on note $N_{L|K} : L^* \to K^*$ la norme de L^* à K^*.

1. Soit K un corps p-adique. Soit L une extension finie galoisienne de K telle que $\mathrm{Gal}\,(L/K)$ soit abélien et de cardinal au moins 2. Montrer que le sous-groupe $N_{L|K}L^*$ de K^* est distinct de K^*.

2. Soit k un corps de nombres dont on note Ω_k l'ensemble des places. Soit F une extension finie galoisienne de k avec $\mathrm{Gal}\,(F/k)$ cyclique. Pour toute place v de k, on note k_v le complété de k en v (resp. F_v le complété de F en une place au-dessus de v). Montrer qu'il existe un homomorphisme

$$k^*/N_{F|k}F^* \to \bigoplus_{v\in\Omega_k} k_v^*/N_{F_v|k_v}F_v^*$$

dont le conoyau est fini.

3. En déduire que si k est un corps de nombres et F est une extension finie galoisienne de k de degré au moins 2 avec $\mathrm{Gal}\,(F/k)$ cyclique, alors le groupe $k^*/N_{F|k}F^*$ est infini.

Exercice 4 : Corps de nombres (7 points).

Soit k un corps de nombres de clôture algébrique $\bar{k}$ et de groupe de Galois absolu $G_k = \mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k)$. Soit M un G_k-module discret et de type fini. On note $\Omega_{\mathbf{R}}$ l'ensemble des places réelles de k, et pour toute place v de k on note k_v le complété de k en v. Pour tout entier $r \geq 3$, on considère l'application diagonale

$$\theta^r(M) : H^r(k, M) \to \bigoplus_{v\in\Omega_{\mathbf{R}}} H^r(k_v, M)$$

induite par les restrictions $H^r(k, M) \to H^r(k_v, M)$.

1. On suppose dans toute cette question 1. que le G_k-module M est sans torsion.

a) Montrer que pour tout entier $i \geq 2$, on a un isomorphisme

$$H^{i-1}(k, M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq H^i(k, M)$$

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, le G_k-module $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est fini.

c) Montrer que pour tout $r \geq 4$, l'homomorphisme $\theta^r(M)$ est un isomorphisme.

2. On ne suppose plus que M est sans torsion.

a) Montrer qu'il existe un entier $s \geq 0$ et une suite exacte de G_k-modules

$$0 \to N \to P \to M \to 0$$

avec P de la forme $\mathbf{Z}[G_k/U]^s \simeq (I_{G_k}^U(\mathbf{Z}))^s$ pour un certain sous-groupe ouvert distingué U de G_k, et N de type fini et sans torsion.

b) Soit $r \geq 4$. Montrer que l'homomorphisme $\theta^r(M)$ est un isomorphisme.

c) Montrer que le résultat de 2.b) est encore valable pour $r = 3$.