Corrigé de l'examen du cours "Cohomologie galoisienne et théorie des nombres" (M2)

Université Paris-Sud (D. Harari)

31 mai 2012

Exercice 1.

1. Cela résulte immédiatement de la suite de restriction-inflation, combinée au fait que $H^1(H, \mathbf{Z}^r) = \mathrm{Hom}_c(H, \mathbf{Z})^r = 0$ puisque H est profini et $\mathbf{Z}$ n'a pas de sous-groupe fini non trivial.

2. Une action de G sur M correspond à un morphisme $G \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z})$, de noyau H ouvert (en effet tout élément de G qui fixe 1 fixe $\mathbf{Z}$ tout entier). Comme $\mathbf{Z}$ n'a que deux automorphismes Id et $-$Id), le groupe G/H (qui s'injecte dans $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z})$) est de cardinal au plus 2.

3. L'analyse de 2. montre qu'il y a deux possibilités : l'action triviale de G et l'action non triviale de G/H, correspondant à $g.x = -x$ pour $g \notin H$.

4. a) Soit e (resp. τ) l'élément trivial (resp. non trivial) de G/H. On envoie $\mathbf{Z}[G/H]$ surjectivement sur M par le morphisme $me + n\tau \mapsto m - n$ (noter que cela définit bien un morphisme de G-modules vu la définition de M). Le noyau est constitué des $ae + a\tau$ avec $a \in \mathbf{Z}$, il est donc isomorphe à $\mathbf{Z}$ (avec action triviale de G).

b) Le G-module $\mathbf{Z}[G/H]$ est isomorphe à $I_G^H(\mathbf{Z})$. Par le lemme de Shapiro, on a $H^1(G, \mathbf{Z}[G/H]) = H^1(H, \mathbf{Z}) = 0$. La longue suite exacte et le lemme de Shapiro donnent alors

$$H^1(G, M) = \ker[H^2(G, \mathbf{Z}) \to H^2(H, \mathbf{Z})]$$

d'où $H^1(G, M) = \ker[\mathrm{Hom}_c(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}_c(H, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})]$ ou encore

$$H^1(G, M) = \mathrm{Hom}(G/H, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/2, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2$$

. Une autre méthode consiste à utiliser 1. pour obtenir

$$H^1(G, M) = H^1(G/H, M) = \widehat{H}^{-1}(G/H, M)$$

puis à calculer directement $\widehat{H}^{-1}(G/H, M)$ en observant que $N_{G/H}$ est nulle (donc son noyau est M) et $I_{G/H}(M)$ est le sous-groupe $2\mathbf{Z}$ de M (ce dernier étant identifié à $\mathbf{Z}$ comme groupe abélien).

Exercice 2.

1. a) Par le résultat admis, $H^2(G_K(p), \mathbf{Z}/p)$ est isomorphe à $H^2(G_K, A)$, lequel est dual de $H^0(K, \mu_p)$ qui est nul puisque K ne contient pas de racine primitive p-ième de 1.

b) Comme $G_K(p)$ est un pro-p-groupe, on déduit de a) qu'il est de dimension cohomologique ≤ 1, et en fait égale à 1 vu que $H^1(G_K(p), \mathbf{Z}/p) \simeq H^1(K, \mathbf{Z}/p)$ est non nul (car $\mathbf{Z}/p$ est par exemple le groupe de Galois de l'extension non ramifiée de degré p de K).

c) Comme en a), on obtient que $H^1(G_K(p), \mathbf{Z}/p)$ est dual de $H^1(K, \mu_p) = K^*/K^{*^p}$. Or K^* (qui est isomorphe à $\mathbf{Z} \times U_K$) est isomorphe au groupe additif $\mathbf{Z} \times F \times \mathbf{Z}_p^N$, ce qui montre que le $\mathbf{Z}/p$-espace vectoriel K^*/K^{*^p} est isomorphe à $(\mathbf{Z}/p)^{N+1}$, vu que F est fini sans p-torsion (donc $F/pF = 0$). La dimension cherchée est donc $N+1$.

2. a) Soit M un $G_K(p)$-module de torsion p-primaire. Par le résultat admis, on a $H^i(G_K(p), M) \simeq H^i(K, M)$ pour tout $i > 0$. Si $i > 2$, ce dernier groupe est nul car K est de dimension cohomologique 2. Par ailleurs $H^2(G_K(p), \mathbf{Z}/p) \simeq H^2(K, \mathbf{Z}/p)$ est dual de $H^0(K, \mu_p)$ qui est non nul par hypothèse.

b) Le calcul est le même qu'en 1.b), à part que la p-torsion de F (qui est celle du groupe multiplicatif U_K) est maintenant isomorphe à $\mathbf{Z}/p$. Ainsi la torsion p-primaire de F est isomorphe à $\mathbf{Z}/p^r$ avec $r \geq 1$ et F/pF est isomorphe à $\mathbf{Z}/p$. La dimension cherchée est donc $N+2$.

Exercice 3.

1. C'est vrai. En effet par dualité locale le groupe fini $H^2(G_K, M)$ est dual de $H^0(G_K, M')$, où M' est le dual de Cartier de M. Le cardinal de M' étant le même que celui de M, le cardinal de son sous-groupe $H^0(G_K, M')$ est au plus r, donc aussi celui du dual $H^2(G_K, M)$.

2. C'est vrai. Soit $a_v \in \operatorname{Br} k_v$, notons $i_v = j_v(a_v)$ son invariant local dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Choisissons une place finie $w \neq v$; comme $j_w : \operatorname{Br} k_w \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est alors un isomorphisme, il existe a_w dans $\operatorname{Br} k_w$ tel que $j_w(a_w) = -j_v(a_v)$. Alors l'élément de $\bigoplus_{u \in \Omega_k} \operatorname{Br} k_u$ qui vaut a_v en v, a_w en w, et 0 partout ailleurs est dans l'image de $\operatorname{Br} k$ via Brauer-Hasse-Noether.

3. C'est vrai. En effet G possède un p-Sylow non trivial, donc un élément non trivial d'ordre une puissance de p, donc (en élevant cet élément à une puissance p-ième convenable) un élément d'ordre p. En particulier G possède un sous-groupe H isomorphe à $\mathbf{Z}/p$. Pour un tel sous-groupe, on a $\widehat{H}^0(H, \mathbf{Z}/p)$ et $H^1(H, \mathbf{Z}/p)$ non nuls, donc tous les $H^i(H, \mathbf{Z}/p)$ sont non nuls par 2-périodicité de la cohomologie modifiée d'un groupe cyclique. Il suffit alors d'appliquer le lemme de Shapiro au G-module p-primaire $M = I_G^H(\mathbf{Z}/p)$ (noter qu'on peut donc trouver M indépendant de i).

4. C'est faux. Prendre $A = \mathbf{Z}/2$. Alors le théorème d'approximation rappelé en préambule dit que k^* est dense dans $\prod_{v \in \Omega_k} k_v^*$, donc pour tout ensemble fini S de places de k, l'application

$$k^*/k^{*^2} \to \prod_{v \in S} k_v^*/k_v^{*^2}$$

est surjective (rappelons que $k_v^{*^2}$ est un sous-groupe ouvert de k_v^*). Ainsi l'image de $H^1(k, A)$ est dense dans $\prod_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, A)$, et comme cette image est incluse dans un sous-groupe strict (le produit restreint), elle ne peut pas être fermée. Noter que par Poitou-Tate, l'image est par contre fermée dans le *produit restreint* des $H^1(k_v, A)$.